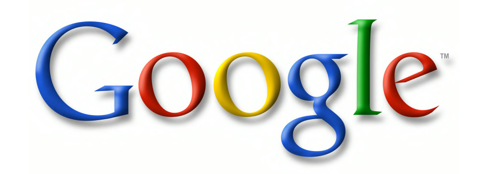
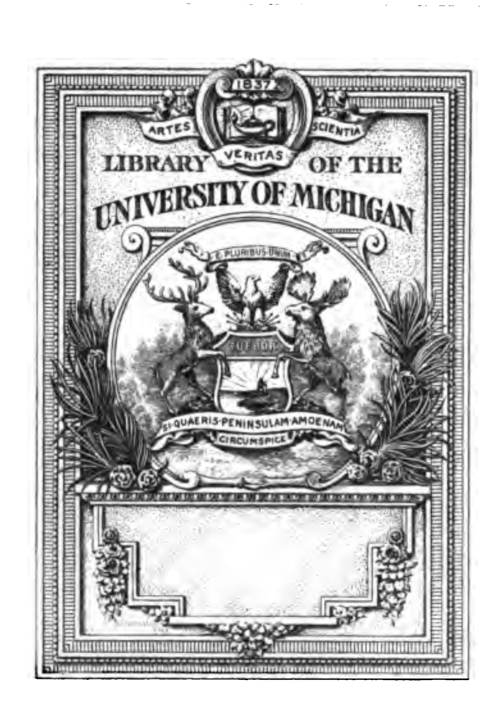



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

VAZEILLE
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe

2e SÉRIE

TOME DEUXIÈME



Année 1883.

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1883

COMITÉ DE RÉDACTION

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

… A GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — La p… artie des idée… tés que
nous allons dév… s cette not…
Nous avons eu … les ex…
principe de ce … ons
récurrente est une …
nous croyons qu'el…
journal.

2. — Imaginons da…
P un point remarquabl…
exemple le centre de …
centre du cercle circons…
tion. Pour marquer que …
triangle $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, nous co…
Prenons maintenant qu…
fait abstraction de l'une d'…
un triangle Δ_1 Δ_2 Δ_3 auquel
demment défini, point sur
étude de Géométrie récurre…
ment abstraction de l'une
obtiendra quatre points P,

P_{123}, P_{23}…

(*) ***Revue*** *des Sociétés savantes*, mai 1…
normale, t. III, 1867. — *Nouvelle Corresp…*

COMITÉ DE RÉDACT



MM. BOURGET
DE LO

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. G. de Longchamps.

1. — La plus grande partie des idées et des propriétés que nous allons développer dans cette note ne sont pas nouvelles. Nous avons eu occasion de les exposer déjà (*); mais le principe de ce que nous avons nommé la *Géométrie récurrente* est une idée simple, et tout à fait élémentaire : nous croyons qu'elle pourra intéresser les lecteurs de ce journal.

2. — Imaginons dans un plan trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; soit P un point remarquable et bien défini de ce triangle : par exemple le centre de gravité, le centre des hauteurs, le centre du cercle circonscrit, etc., pour préciser cette définition. Pour marquer que P est un point bien déterminé du triangle $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, nous conviendrons de le désigner par P_{123}.

Prenons maintenant quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 ; si l'on fait abstraction de l'une d'elles, de Δ_4 pour exemple, il reste un triangle Δ_1 Δ_2 Δ_3 auquel correspond le point P_{123} précédemment défini, point sur lequel on se propose de faire une étude de Géométrie récurrente. Ayant ainsi fait successivement abstraction de l'une des quatre droites données, on obtiendra quatre points P,

$$P_{123}, \quad P_{234}, \quad P_{341}, \quad P_{412}.$$

(*) *Revue des Sociétés savantes*, mai 1864. — *Annales scientifiques de l'École normale*, t. III, 1867. — *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1877.

Ces quatre points jouissent, soit par leurs positions respectives les uns par rapport aux autres, soit par leur situation vis-à-vis des droites données, de propriétés géométriques qui, dans certains cas, peuvent être remarquables : nous en donnerons tout à l'heure des exemples divers. De cette étude géométrique peut résulter la découverte d'un point que nous désignerons par P_{1234}, et qui jouit, par rapport aux droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 ou par rapport aux points P_{123}, P_{234}, P_{341}, P_{412}, de propriétés géométriques remarquables et qui rappellent celles qui liaient le point P_{123} au triangle $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$.

Nous conviendrons de dire que le point P_{123} défini par le triangle est *un point* P *d'ordre 3;* et que le point analogue P_{1234} qui correspond à quatre droites, est *un point* P *d'ordre 4.*

Prenons maintenant cinq droites et faisons successivement abstraction de l'une d'elles, de Δ_5 par exemple. Nous aurons à considérer un quadrilatère complet formé par les quatre autres droites, et à ce quadrilatère correspond un point P d'ordre 4, point que nous désignons par P_{1234}. On obtient ainsi cinq points d'ordre 4,

$$P_{1234}, P_{2345}, P_{3451}, P_{4512}, P_{5123}.$$

Si l'on peut avec ces cinq points construire un point P qui s'en déduise comme on a déduit le point P d'ordre 4 des points P d'ordre 3, nous dirons que ce point est *un point* P *d'ordre 5,* et nous le désignerons par P_{12345}.

3. — On voit maintenant, d'après ces explications, comment on peut former un théorème de Géométrie récurrente.

Prenons pour point de départ un théorème de Géométrie élémentaire, relatif au triangle : par exemple, et comme nous le ferons tout à l'heure, celui qui fait remarquer que *les perpendiculaires élevées au milieu des côtés d'un triangle se coupent au même point* O, *centre du cercle circonscrit à ce triangle.*

Pour faire l'étude récurrente de ce théorème on procédera comme nous allons l'expliquer. On prendra dans un plan quatre droites, deux à deux concourantes ; à ces droites correspondent quatre points O ; on étudiera la position respective de ces points O d'ordre 3, et l'on trouvera qu'ils sont

placés sur une même circonférence. Nous dirons que le centre de cette circonférence est le point O d'ordre 4.

Prenons maintenant 5 droites; nous aurons 5 points O d'ordre 4 et nous ferons voir qu'ils sont placés sur une circonférence. Nous dirons que le centre de cette circonférence est le point O d'ordre 5.

Pour généraliser la proposition on admettra que les propriétés trouvées appartiennent aux points O d'ordre $(n - 1)$, et l'on fera voir qu'elles subsistent pour le point O d'ordre n.

Telles sont les idées générales qui servent de base à cette Géométrie récurrente; les applications que nous allons exposer feront mieux ressortir, pensons-nous, l'intérêt qui s'attache à cette idée élémentaire.

PREMIÈRE APPLICATION

4. — ***Étude d'une série de cercles se déduisant, par voie récurrente, du cercle circonscrit au triangle.***

On sait que *si l'on considère un quadrilatère complet défini par quatre droites, les circonférences circonscrites aux triangles formés par ces droites combinées trois à trois se coupent au même point.*

Ceci posé, nous énoncerons d'abord le théorème suivant:

Théorème I. — *Soient quatre droites* 1, 2, 3, 4 *situées dans un plan: considérons les cercles circonscrits aux triangles formés par les droites combinées trois à trois; les centres* O_{123}, O_{134}, O_{124} *déterminent un triangle semblable à celui qui est formé par les droites* 2, 3, 4.

Nous désignerons, dans ce qui va suivre, les n droites dont il sera question par les nombres

$$1, 2, 3, \ldots n;$$

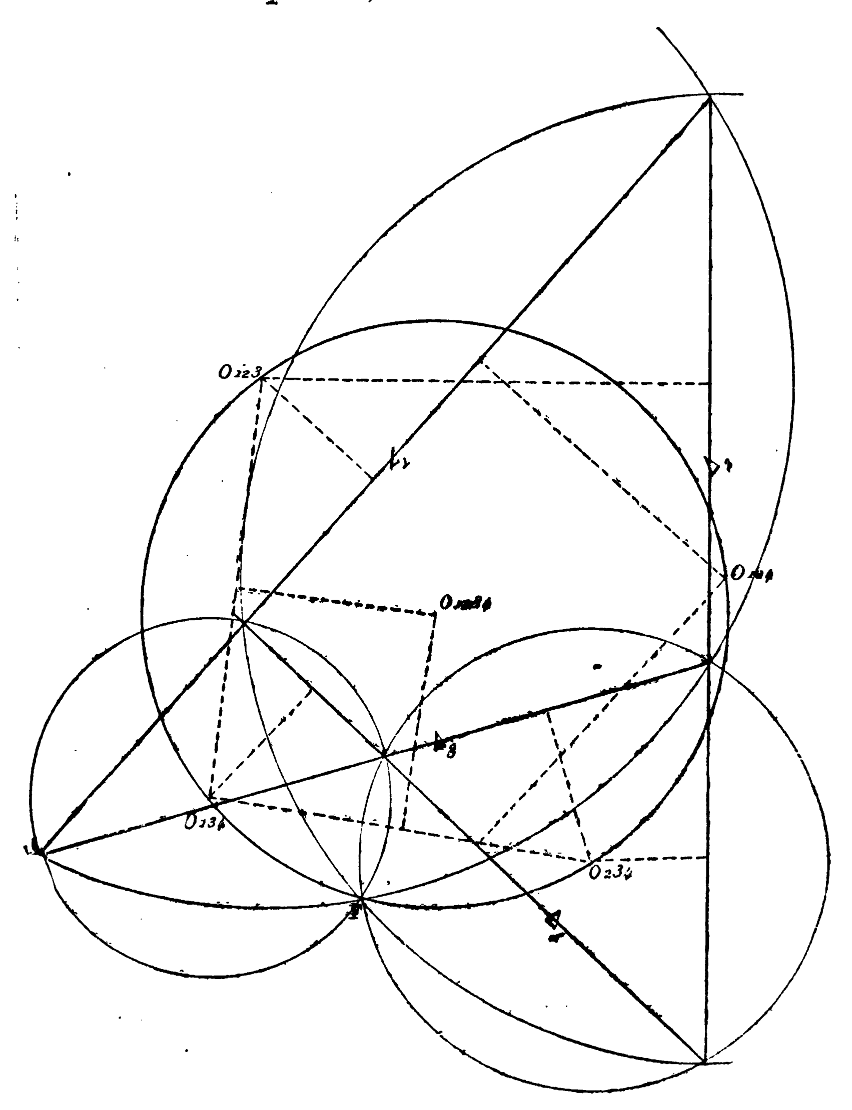
(α, β) désignera le point de concours des droites numérotées α, β, et nous supposerons formellement que ce point n'est pas rejeté à l'infini. La notation $\widehat{\alpha, \beta}$ indiquera l'un des angles que fait la droite α avec β et quand nous écrirons l'égalité

$$\widehat{\alpha, \beta} = \widehat{\alpha', \beta'}$$

nous voudrons exprimer par cette écriture que les droites α

et β forment un système qui est superposable à celui des droites α', β'.

Cette notation admise, revenons au théorème énoncé.



Appelons F le point commun aux quatre circonférences circonscrites aux triangles 123, 124, 134, 234. Les droites $O_{123}\,O_{124}$, et $O_{124}\,O_{134}$ sont respectivement perpendiculaires aux droites F (1, 2); F (1, 4). Les angles

$$O_{123}O_{124}O_{134} \text{ et } (1,2)\,F\,(1,4)$$

sont donc égaux. Le quadrilatère déterminé par les sommets du triangle 124 et le point F étant inscriptible on a

$$O_{123}O_{124}O_{134} = \widehat{2,4}.$$

Ainsi, si l'on considère trois cercles circonscrits et leurs centres O_α, O_β, O_γ; *l'angle* $O_\alpha\ O_\beta\ O_\gamma$ *est égal à l'angle, des deux droites dont les numéros s'obtiennent en retranchant auxindices extrêmes* α, γ *les numéros qui leur sont communs.*

Cette propriété qui sert de base aux propriétés suivantes montre aussi l'utilité, contestable au premier abord, de la notation à indices que nous avons adoptée. Sans cette notation il serait difficile d'indiquer nettement et sans ambiguïté quels sont, dans les figures que nous étudions, les couples de lignes qui sont superposables.

En appliquant successivement la remarque précédente aux trois angles du triangle $O_{123}\ O_{124}\ O_{134}$, on reconnaît que ce triangle a des angles égaux ou supplémentaires avec ceux du triangle 234, triangle obtenu en supprimant le numéro commun aux trois indices. Mais on sait que deux triangles qui ont les angles *égaux ou supplémentaires* ont nécessairement leurs angles égaux deux à deux et, par suite, sont semblables. C'est la propriété énoncée.

5. — Théorème II. — *Les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés par quatre droites, combinées trois à trois, appartiennent à un même cercle.*

En effet, si l'on considère le quadrilatère

$$O_{123}\ O_{134}\ O_{124}\ O_{234},$$

on a, d'après le théorème précédent,

$$O_{123}\ O_{124}\ O_{134} = \widehat{2.4} \qquad (1)$$

et aussi

$$O_{123}\ O_{234}\ O_{134} = \widehat{2.4} \qquad (2)$$

puisqu'il faut faire abstraction du numéro commun aux trois indices, ici 3, et prendre dans l'indice moyen les deux autres numéros.

La comparaison des égalités (1) et (2) prouve bien que le quadrilatère considéré est inscriptible. Nous désignons par O_{1234} le centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère et nous dirons *qu'il est d'ordre 4*.

6. — Considérons maintenant le pentagone complet formé par cinq droites 1, 2, 3, 4, 5 situées dans le même plan et deux à deux concourantes. Aux deux quadrilatères 1234, 1235 correspondent deux cercles d'ordre 4, lesquels ont un point commun O_{123}. Soit G le second point commun, on aura donc $$O_{134}\, G\, O_{123} = O_{134}\, O_{234}\, O_{123}.$$

Mais on a vu que $O_{134}\, O_{234}\, O_{123} = \widehat{2.4}$;

donc $$O_{134}\, G\, O_{123} = \widehat{2.4}. \qquad (1)$$

On voit que le second membre $\widehat{2,4}$ de cette égalité s'obtient en faisant abstraction des numéros communs aux deux indices 134, 123 de la lettre O dans le premier membre.

D'après cette remarque on peut écrire aussi
$$O_{123}\, G\, O_{135} = \widehat{2.5}. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) on déduit, en remarquant que les deux angles ont un côté commun $G\, O_{123}$,
$$O_{134}\, G\, O_{135} = \widehat{2.4} \pm \widehat{2.5} = \widehat{4.5}.$$
De cette égalité, après avoir répondu, comme nous le ferons tout à l'heure, à une difficulté et à une objection qu'elle soulève, on déduit la propriété suivante :

Soit G le point de concours (autre que O_{123}) des deux circonférences d'ordre 4, O_{1234} et O_{1235} ; soient O_α et O_β deux points d'ordre 3 pris sur ces circonférences et tels que les indices α et β aient deux numéros communs : l'angle $O_\alpha\, G\, O_\beta$ est égal à celui des deux droites dont les numéros s'obtiennent en retranchant aux indices les numéros communs.

7. — Mais avant d'aller plus loin nous devons nous expliquer sur la difficulté que nous venons de signaler, et qui se rencontre plus ou moins dans toutes les questions de Géométrie récurrente.

Dans la Géométrie élémentaire, la figure aide puissamment au raisonnement, et les constructions donnent aux éléments de la figure des positions respectives qui, pour ainsi dire,

s'imposent et permettent d'affirmer que tel angle A est bien égal à un angle B et non au supplément de celui-ci ou, dans d'autres cas, que tel angle A est bien égal à la *somme* des angles inférieurs B et C d'un triangle et non à leur différence.

Dans la Géométrie récurrente la figure ne peut plus, à un certain moment, être tracée, puisque, comme nous le verrons tout à l'heure, il faut poursuivre le raisonnement jusqu'à la considération de *n* droites. Il faut donc montrer ici, non par une figure dont le dessin est contestable ou impossible, mais par un raisonnement, que l'on a bien toujours, et dans tous les cas

$$\widehat{4.5} = O_{134}\,G\,O_{135}.$$

Considérons à cet effet le triangle 2 4 5 et soient α, β, γ les angles *intérieurs* de ce triangle.

Nous avons dit que l'angle $O_{123}GO_{134}$ était égal à l'angle α, ou à $(\pi - \alpha)$; de même $O_{123}GO_{135}$ est égal à β ou à $(\pi - \beta)$. Supposons pour fixer les idées que ces angles soient α et β : si les points $O_{134}O_{123}O_{135}$ et G sont disposés comme

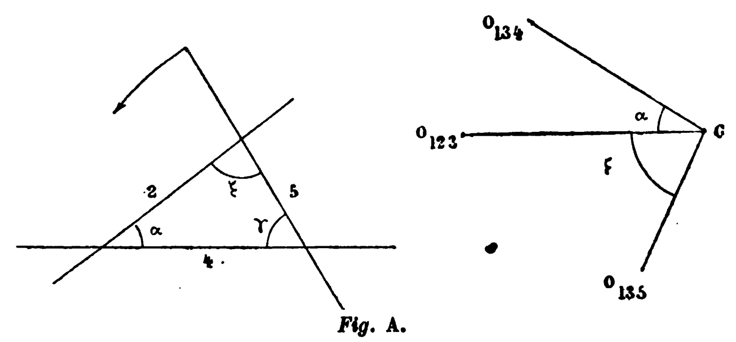


Fig. A.

le montre la figure (A), alors l'angle $O_{134}GO_{135}$ est égal à $(\pi - \gamma)$, par suite on peut écrire, comme nous l'avons fait,

$$O_{134}GO_{135} = \widehat{4.5}.$$

Mais cette conclusion n'est plus exacte dans l'hypothèse de la figure (B) ; le principe que nous avons énoncé ne pourrait plus être accepté, au moins dans tous les cas. C'est en ce point délicat que réside la difficulté que nous avons tenu à signaler et à laquelle on répond comme nous allons le montrer.

Supposons un instant que la disposition de la figure (B) soit possible : faisons tourner la droite 5 autour du point (4.5) jusqu'à ce qu'elle vienne se confondre avec 4. L'angle β augmente sans cesse et a pour limite $(\pi - \alpha)$; dans la figure (B) le point O_{135} se déplace de telle façon que la droite GO_{135} s'écarte de plus en plus et a pour position limite un point qui, dans aucun cas, ne peut venir se confondre avec O_{134}. Ceci implique contradiction, car il est évident que ladroite 5 étant confondue avec 4, le triangle 134 est le même que 135 et les deux points $O_{134}O_{135}$ doivent occuper la même position, à la limite.

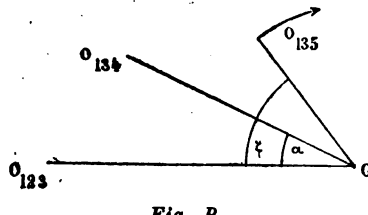


Fig. B.

On examinera de même les autres cas, ceux où l'on suppose $O_{123}GO_{134} = \pi - \alpha$ ou $O_{123}GO_{135} = \pi - \beta$ et l'on verra, en suivant le raisonnement précédent, que dans tous les cas on a

$$O_{134}GO_{135} = 4.5.$$

(A suivre.)

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. A. Morel.

Nous nous proposons, dans cette note, de faire connaître à nos lecteurs quelques-unes des intéressantes propriétés qui ont été exposées par M. *Brocard*, capitaine du génie, dans la *Nouvelle Correspondance* d'abord, puis dans le *Mathesis* ; nous serons ainsi amenés à considérer deux points et un cercle auxquels, suivant l'avis de M. *Neuberg*, nous proposons de donner le nom de *points de Brocard* et de *cercle de Brocard.*

1. — Théorème. — *Étant donné un triangle* ABC, *on peut trouver un point* ω *dans le plan de ce triangle, tel que, en le joignant aux points* A, B, C, *les angles* ωAB, ωBC, ωCA *soient égaux.*

En effet, si je fais passer par les deux sommets A et B (*fig. 1*) une circonférence, tangente au côté BC, tout point ω de l'arc intérieur AωB est tel que les angles ωAB, ωBC sont égaux, car ils ont même mesure; si donc je fais passer par les points B et C; une circonférence tangente au côté AC, cette circonférence coupera la première en un point ω qui répond à la question; car, pour ce point particulier, on a

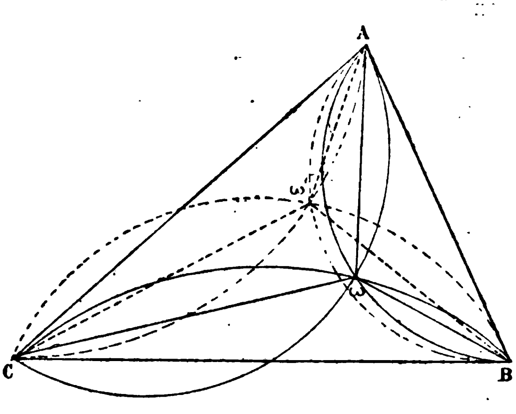


Fig. 1.

$$\omega AB = \omega BC = \omega CA.$$

L'arc AωB est le segment capable du supplément de l'angle B ; de même l'arc BωC est le segment capable du supplément de l'angle C et l'on voit que : si sur chacun des côtés d'un triangle comme corde on décrit un segment capable du supplément d'un angle adjacent en prenant ces angles toujours dans le même sens, en parcourant le périmètre du triangle, ces trois segments de cercle se coupent en un point ω, qui jouit de la propriété indiquée.

La construction même que nous venons d'indiquer nous montre que si nous prenons les angles du triangle en parcourant le périmètre en sens contraire, nous aurons un second point ω' tel que les angles ω'AC, ω'BA, ω'AB soient égaux.

Ce sont ces deux points ω et ω' que nous appellerons les *points de Brocard* (*).

2. — Nous allons calculer la valeur de l'angle ωAB en

(*) M. Brocard appelle ces points les *points segmentaires*, par suite de la construction même qui a servi à les déterminer (voir *Nouvelle Correspondance mathém.*, t. III, p. 109)

fonction des angles du triangle donné; appelons α cet angle; x, y, z, les longueurs ωA, ωB, ωC; nous avons immédiatement

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha}; \quad \frac{y}{z} = \frac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha}; \quad \frac{z}{x} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Multiplions ces égalités membre à membre; les quantités x, y, z disparaissent, et il reste l'équation

$$\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha) = \sin^3\alpha. \qquad (1)$$

Développons cette équation; divisons par $\sin^3\alpha$, qui n'est pas nul; il vient

$$\begin{aligned}&\operatorname{cotg}^3\alpha \sin A \sin B \sin C\\ &-\operatorname{cotg}^2\alpha \cos A\cos B\cos C\,(\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}A\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)\\ &+\operatorname{cotg}\alpha \sin A\sin B\sin C - (1+\cos A\cos B\cos C) = 0. \qquad (2)\end{aligned}$$

En divisant par le produit des trois sinus, il vient après réductions faciles

$$\begin{aligned}&\operatorname{cotg}^3\alpha - \operatorname{cotg}^2\alpha\,(\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C) + \operatorname{cotg}\alpha\\ &\quad - (\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C) = 0. \qquad (3)\end{aligned}$$

Cette équation n'admet qu'une seule solution; car elle peut se mettre sous la forme:

$$(\operatorname{cotg}^2\alpha + 1)(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}A - \operatorname{cotg}B - \operatorname{cotg}C) = 0.$$

Donc la relation cherchée est

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C. \qquad (4)$$

3. — On pourrait encore obtenir cette relation au moyen d'équations de degré moindre; en effet, le triangle AωB nous donne

$$\frac{y}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin B};$$

de même, le triangle AωC donne

$$\frac{z}{b} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin A};$$

d'où l'on tire par division

$$\frac{by}{cz} = \frac{\sin A\sin\alpha}{\sin B\sin(A-\alpha)}.$$

Dans cette équation, remplaçons $\frac{y}{z}$ par la valeur trouvée précédemment, et $\frac{b}{c}$ par le rapport $\frac{\sin B}{\sin C}$; il vient

$$\frac{\sin B \sin (C - \alpha)}{\sin C \sin \alpha} = \frac{\sin A \sin \alpha}{\sin B \sin (A - \alpha)}.$$

Cette équation développée devient, en divisant par $\sin^2 \alpha$,

$$\cot g^2 \alpha \sin A \sin C \sin^2 B - \cot g \alpha \sin^3 B - \cos B (1 + \cos A \cos B \cos C) = 0. \quad (5)$$

Cette équation est du second degré; ses racines sont rationnelles, car la quantité sous le radical peut se mettre sous la forme

$\sin^2 B [\sin^4 B + 4 \sin A \sin C \cos B (1 + \cos A \cos B \cos C)] = 0$;

mais la quantité $1 + \cos A \cos B \cos C$ peut être remplacée, puisque A, B, C sont les angles d'un triangle, par

$$\sin^2 B + \sin A \sin C \cos B;$$

donc la quantité sous le radical est égale à

$$\sin^2 B (\sin^2 B + 2 \sin A \sin C \cos B)^2.$$

On trouve par suite pour l'une des racines

$$\cot g \alpha = \frac{\sin^2 B + \sin A \sin C \cos B}{\sin A \sin C \sin B},$$

ou bien, d'après une transformation simple,

$$\cot g \alpha = \cot g A + \cot g B + \cot g C.$$

L'autre racine donne

$$\cot g \alpha = - \cot g B,$$

qui ne convient pas à la question.

On peut même obtenir immédiatement une équation du premier degré; en effet, le triangle $A\omega B$ donne

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin (B - \alpha)}{\sin B};$$

de même, $A\omega C$ donne

$$\frac{z}{b} = \frac{\sin (A - \alpha)}{\sin A};$$

en divisant membre à membre, il vient, en remplaçant $\frac{x}{z}$ par sa valeur trouvée plus haut,

$$\frac{\sin B \sin \alpha}{\sin C} = \frac{\sin (B - \alpha) \sin A}{\sin B}. \quad (6)$$

Cette équation développée donne

$$\cot g \alpha = \frac{\sin^2 B + \sin A \sin C \cos B}{\sin A \sin C \sin B},$$

et par suite $\cot g \alpha = \cot g A + \cot g B + \cot g C.$

4. — Nous pouvons nous proposer de calculer les lignes ωA, ωB, ωC ; pour cela, nous avons dans le triangle AωB

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin(B - \alpha)}{\sin B}.$$

Le triangle AωC nous donne

$$\frac{x}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin A}.$$

En égalant ces deux valeurs de x, nous avons

$$b \sin B \sin \alpha = c \sin A \sin (B - \alpha)$$

ce qui donne $\quad \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{c \sin B A \sin B}{b \sin B + c \sin A \cos B}.$

En multipliant haut et bas par $2a$, et remplaçant $2ac$ sin B par 4S, $2ab$ sin B par $2b^2$ sinA, et $2ac$ cos B par $a^2 + c^2 - b^2$ il vient, pour la valeur de α en fonction des côtés,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4S}{(b^2 + c^2 + a^2)}, \qquad (7)$$

d'où $\quad \sin \alpha = \dfrac{4S}{\sqrt{(b^2 + c^2 + a^2)^2 + 16S^2}},$

Mais on a

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

On en tire

$$\sin \alpha = \frac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}. \qquad (8)$$

Posons $\quad a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = K^2;$

il vient $\quad \omega A = \dfrac{2bS}{K \sin A},$

et. puisque $2S = bc \sin A$, on trouve

$$\omega A = \frac{b^2c}{K}.$$

On aura de même

$$\omega B = \frac{c^2a}{K}; \quad \omega C = \frac{a^2b}{K}. \qquad (9)$$

Un calcul analogue nous donnerait, pour les distances du point ω' aux sommets, les valeurs suivantes :

$$\omega' A = \frac{c^2b}{K}; \ \omega' B = \frac{a^2c}{K}; \ \omega' C = \frac{b^2a}{K}. \qquad (10)$$

Ces dernières valeurs trouvées par M. Chadu (*) vont nous permettre de signaler une relation fort importante entre les points ω et ω'. En effet, on a

$$\frac{\omega A}{\omega' A} = \frac{b}{c}\,; \quad \frac{\omega C}{\omega' B} = \frac{b}{c}\,;$$

donc les deux triangles ωAC, $\omega' AB$ sont semblables, et par suite les côtés homologues étant ωA et $\omega' A$, ωC et $\omega' B$, les angles ωAC, $\omega' AB$ sont égaux; donc les lignes $A\omega'$, $B\omega'$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle en A; il en est de même pour chacun des autres couples de droites par rapport à la bissectrice correspondante.

(A suivre.)

QUESTION 34

Solution par MM. Vail et Lenoir, Ecole Albert-le-Grand.

Par un point P *sur le prolongement de la base* BC *d'un triangle, mener une transversale rencontrant* AC *en* Q *et* AB *en* R, *de façon que le produit* AR . CQ *soit minimum.*

(Educ. Times.)

Menons QS parallèle à AB. Soit $PC = d$, $PB = m$, $PS = x$, $m - d = a$.

On a
$$QC = \frac{b}{a}(x - d)$$
$$AR = c - \frac{mc}{ax}(x - d)$$

d'où
$$AR.\,QC = \frac{bc}{a}\left[x - d - \frac{m}{a}\left(x - 2d + \frac{d^2}{x}\right)\right]$$

(*) *Nouv. Annales math.*, 1875. Sol. de la question 1166.

$$= \frac{bc}{a}\left[x\left(1 - \frac{m}{a} + \frac{md^2}{ax^2}\right) - d + \frac{2md}{a}\right]$$

Cette expression est minima si

$$1 - \frac{m}{a} + \frac{md^2}{ax^2} = 0\,;$$

d'où $$x^2 = md\,;$$

donc PS doit être moyenne proportionnelle entre PB et PC.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Lachesnais, de Saint-Louis ; Bablon, d'Épinal.

QUESTION 52

Solution par M. DEVILLE, brigadier d'artillerie de marine, à Lorient.

On prend un angle droit AOB, *et sur* OB *un point fixe* M. *Soit un cercle tangent en* O *à la droite* OA. *Menons par* M *une tangente à ce cercle et soit* P *le point de contact. Menons* OP *et les bissectrices des angles formés par les droites* OC *et* MP.

Démontrer que le lieu décrit par les points I *et* I′ *où ces bissectrices rencontrent* OP *est un système de deux cercles quand on fait varier le cercle* C.

(G. L.)

Soit MI la bissectrice intérieure, on a

$$\text{OIM} = 180 - (\text{IOM} + \text{IMO})\,;$$

or $$\text{IOM a pour mesure } \frac{\text{arc PD}}{2} = \frac{2\text{PD}}{4}$$

$$\text{IMO} = \frac{\text{PMC}}{2} \text{ a pour mesure } \frac{\text{arc OP} - \text{arc PD}}{4};$$

donc $$\text{IOM} + \text{IMO} = \frac{\text{PD} + \text{PO}}{4} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ,$$

donc $$\text{OIM} = 135^\circ; \text{ de même } \text{OI'M} = 45^\circ.$$

Les lieux des points I et I' sont donc respectivement deux segments de cercles capables de 135° et 45° décrits sur OM comme corde.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Puig, à Marseille ; Mosnat, à Thiers.

QUESTION 54

Solution par M. TOUSSAINT, à Bar-le-Duc.

Résoudre le système :

$$\frac{x^2 - y^2 - z^2 - d^2}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{a}{d}, \qquad (1)$$

$$\frac{2y(x - d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{b}{d}. \qquad (2)$$

$$\frac{2z(x - d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{c}{d}, \qquad (3)$$

en supposant $a^2 + b^2 + c^2$ *différent de* d^2. (G. L.)

L'équation (1) donne

$$\frac{x^2 - d^2}{y^2 + z^2} = \frac{a + d}{d - a}. \qquad (4)$$

Divisant terme à terme les équations (2) et (3), on a

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c} \quad \text{ou} \quad y = \frac{bz}{c}. \qquad (5)$$

Portant dans (4) cette valeur d'y, il vient

$$\frac{x^2 - d^2}{\frac{b^2z^2}{c^2} + z^2} = \frac{a + d}{d - a}; \qquad (6)$$

portant de même dans (2) la valeur d'y, on a

$$\frac{2\,\dfrac{bz}{c}(x-d)}{x^2+\dfrac{b^2z^2}{c^2}+z^2-d^2}=\frac{b}{d};\qquad(7)$$

or (6) peut s'écrire

$$\frac{x^2-d^2}{x^2+\dfrac{b^2z^2}{c^2}+z^2-d^2}=\frac{a+d}{2d},\qquad(8)$$

en ajoutant à chaque dénominateur le numérateur.

Divisant membre à membre (7) par (8), il vient

$$x=\frac{(a+d)\,z}{c}-d.\qquad(9)$$

Portant dans (6) cette valeur de x, on a

$$z=\frac{2cd\,(d-a)}{d^2-a^2-b^2-c^2}.$$

Connaissant z, on tire x et y en substituant cette valeur dans (5) et (9)

$$x=d\,\frac{d^2-a^2+b^2+c^2}{d^2-a^2-b^2-c^2},$$

$$y=2bd\,\frac{(d-a)}{d^2-a^2-b^2-c^2}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Poitresse, à Épinal; Mosnat, à Thiers.

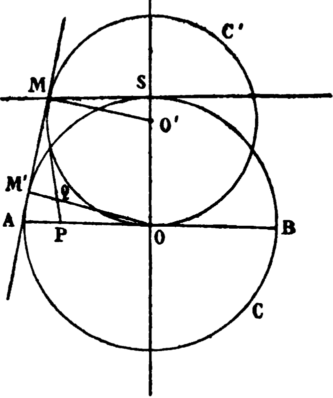
QUESTION 56

Solution par Mlle LUCIE J..., à Liège.

On considère un cercle C de centre O. Soit AB un diamètre fixe de ce cercle. Par le point O on mène une circonférence C′ tangente à AB, puis on mène une tangente commune aux cercles C et C′. On propose de trouver le lieu des points de contact de cette droite avec C′, lieu qui se compose de deux droites parallèles. (G. L.)

Soit M un des points du lieu et soit MP la perpendiculaire abaissée de M sur AB. Menons MO′, M′O. La figure MOO′Q est un parallélogramme. Donc MQ = OO′ (1).

Les triangles rectangles OPQ, MM'Q qui ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal sont égaux, donc PQ = M'Q = OM' — OQ = OM' — O'M (2).



Additionnant (1) et (2) on a

$$MQ + PQ = MP = R,$$

rayon de la circonférence O.

Donc, quel que soit le point M, il est toujours éloigné de AB d'une quantité constante. Le lieu des points M est donc la parallèle au point S, à la droite AB. Le lieu se compose donc du système des tangentes au cercle C parallèles à AB.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Deville, à Lorient ; Puig, à Marseille ; Bordier, pensionnat de Blanzac (Charente) ; Musy, Richelet collège de Pontarlier ; Desplanques, collège de Condé ; Richelet, Sauv, à Moulins ; Bablon, à Epinal.

QUESTION 58

Solution par M. Berthelot, maître répétiteur au Lycée de Bourges.

On considère l'équation du quatrième degré

$$(x + \alpha)(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 2)(x + \alpha + 3) + h = 0.$$

On propose de résoudre cette équation et de montrer que ses racines sont imaginaires si h *est supérieur à* 1 ; *deux à deux coïncidentes, si* h = 1, *et réelles si* h *est inférieur à* 1. (G. L.)

Cette équation peut s'écrire

$$[(x + \alpha)(x + \alpha + 3)][(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 2)] + h = 0$$

$$[x^2 + (2\alpha + 3)x + \alpha^2 + 3\alpha + 2][x^2 + (2\alpha + 3)x + \alpha^2 + 3\alpha] + h = 0.$$

Si on pose $x^2 + (2\alpha + 3)x + \alpha^2 + 3\alpha = y,$ (1)

l'équation transformée devient

$$y^2 + 2y + h = 0 ;$$

d'où
$$y' = -1 + \sqrt{1-h}$$
$$y'' = -1 - \sqrt{1-h}$$

Remplaçons successivement dans (1) y par ces valeurs, il en résulte pour x les quatre valeurs suivantes :

$$x_1 = \frac{-(2\alpha+3) + \sqrt{5+4\sqrt{1-h}}}{2}.$$

$$x_2 = \frac{-(2\alpha+3) - \sqrt{5+4\sqrt{1-h}}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-(2\alpha+3) + \sqrt{5-4\sqrt{1-h}}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-(2\alpha+3) - \sqrt{5-4\sqrt{1-h}}}{2}.$$

Ces valeurs seront réelles si $5 \geq 4\sqrt{1-h}$.

Si $h > 1$, la quantité sans le radical est imaginaire, par suite les quatre racines sont imaginaires.

Si $h = 1$, la quantité sans le radical égale 5 ; les racines sont deux à deux égales.

Si $h < 1$, la quantité $4\sqrt{1-h}$ est plus petite que 5 ; les racines sont dès lors réelles.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Chevalier, à Sainte-Barbe ; Deville, brigadier d'artillerie, à Lorient ; Mosnat, à Thiers ; Rougelin, Sauv, Giat, à Moulins ; Bablon, à Epinal.

QUESTION 59

Solution par M. CHEVALIER, élève à l'École préparatoire Sainte-Barbe.

Résoudre l'équation
$$x(x+\alpha)(x+\beta)(x+\alpha+\beta)+h=0.$$
(G. L.)

Cette équation peut s'écrire
$$[x(x+\alpha+\beta)][(x+\alpha)(x+\beta)]+h=0$$
$$[x^2+(\alpha+\beta)x][x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]+h=0$$

et si l'on pose $x^2 + (\alpha + \beta)x = y$, (1)
l'équation transformée devient

$$y^2 + \alpha\beta y + h = 0\,;$$

d'où
$$y = \frac{-\alpha\beta \pm \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4h}}{2}$$

En remplaçant dans (1) et résolvant on trouve

$$x = \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \pm 2\sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4h}}}{2}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de discuter cette valeur de x.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Berthelot, à Bourges; Puig, à Marseille; Marny, à Valenciennes; Deville, brigadier d'artillerie, à Lorient; Giat, Rougelin, Sauv, à Moulins; Bablon, à Epinal.

QUESTION 61

Solution par M. Bablon, élève au Collège d'Épinal.

Résoudre l'équation

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x+2} + \frac{3x}{x+3} + \frac{4}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0.$$

(G. L.)

Réduisant au même dénominateur, il vient, en chassant le dénominateur,

$$x(x+2)(x+3) + 2x(x+1)(x+3) + 3x(x+1)(x+2) + 4 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$x(x+3)(3x+4) + 3x^2(x+3) + (6x+4) = 0$$

ou
$$x(x+3)(6x+4) + 6x + 4 = 0$$

ou enfin
$$(6x+4)(x^2 + 3x + 1) = 0.$$

Elle se décompose en deux autres :

$$6x + 4 = 0, \quad \text{d'où } x = \frac{-3}{2},$$

et
$$x^2 + 3x + 1 = 0,$$

qui a pour racine
$$\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Savonnet et Simon, à Salins.

QUESTION 63

Solution par M. CHOLLET, élève au Lycée d'Angers.

Les premiers termes d'une série sont 1, 7 *et* 19; *mais on a perdu la loi de récurrence de cette série; on sait seulement que le terme général* u_n *était une fonction entière et de second degré en* n.

Retrouver cette série et démontrer que la somme des n *premiers termes est égale à* n^3. (G. L.)

1. — On sait que $u_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$

On en déduit

$$1 = \alpha + \beta + \gamma$$
$$7 = 4\alpha + 2\beta + \gamma$$
$$19 = 9\alpha + 3\beta + \gamma.$$

Ce qui donne,

$$\alpha = 3 \quad \beta = 3 \quad \gamma = 1.$$

Par suite

$$u_n = 3(n^2 - n) + 1 = 3n(n-1) + 1.$$

On pourra donc reconstituer la série de la manière suivante :

Sur une première ligne horizontale on écrira la suite naturelle des nombres entiers, précédée de zéro.

Sur une seconde ligne on écrira le produit de chacun des nombres de la ligne (I) par celui qui le précède immédiatement.

Enfin sur une troisième ligne on écrira le triple augmenté d'une unité de chacun des nombres de la ligne (II). — La ligne (III) contient alors la série demandée :

(I)	0	1	2	3	4	5	6	7	8 . . . .
(II)		0	2	6	12	20	30	42	56 . . . .
(III)		1	7	19	37	61	91	127	169 . . . .

1. — Appelons Σ la somme des n premiers termes de la série. — En vertu de l'égalité $u_n = 3(n^2 - n) + 1$, nous pouvons écrire

$$\Sigma = 3(1^2 - 1) + 1 + 3(2^2 - 2) + 1 + 3(3^2 - 3) + 1 \\ \ldots + 3(n^2 - 2) + 1.$$

Ou en groupant les facteurs de même espèce

$$\Sigma = 3[(1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2) - (1 + 2 + 3 \ldots + n)] + n.$$

L'expression entre crochets représente l'excès de la somme S_2 des secondes puissances des n premiers nombres, sur la somme S_1 des premières puissances de ces mêmes nombres.

Or
$$S^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et
$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Portant ces valeurs dans Σ, on a

$$\Sigma = 3\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + n.$$

Et après réduction $\Sigma = n^3$ C. Q. F. D.

Nota. — La même question a été résolue par MM. H. S., à Toulouse; Gilloteaux au lycée Charlemagne; Savonnet, Simon, à Salins; Desplanques, à Condé.

QUESTIONS PROPOSÉES

67. — On considère un rectangle dont les sommets sont les points O, P, Q, R. Par les points P, Q, on fait passer une infinité de cercles; soit Δ l'un d'entre eux. Ce cercle Δ coupe QR en un point M, et la droite OM coupe à son tour le cercle Δ en un point I; démontrer que le lieu du point I est une circonférence. *(G. L.)*

68. — On considère un cercle fixe Δ, et un diamètre fixe PQ de ce cercle. Soit A un point, supposé mobile, sur Δ; abaissons de ce point une perpendiculaire AB sur PQ, et du point A comme centre, avec AB comme rayon, décrivons une circonférence qui rencontre Δ aux points C et D; la droite CD rencontre AB au point I. 1° Trouver le lieu décrit par le point I; 2° démontrer que si l'on considère sur Δ deux points A et A' tels que la corde AA' soit vue du centre O sous

un angle droit et si l'on répète au point A′ la construction indiquée pour le point A, les distances du point O aux deux cordes CD, C′D′ ainsi déterminées ont une somme constante; 3° étudier les variations de CD quand le point A se déplace sur Δ; 4° après avoir remarqué que le point I est le milieu de AB, on propose de démontrer que les cercles décrits sur BP et BQ comme diamètres sont tangents l'un et l'autre à la droite CD; 5° CD rencontre PQ en un point R; démontrer que la polaire du point R par rapport aux droites AP et BQ passe par le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur CD.

(G. L.)

69. — Dans un triangle ABC, on a

$$2R = \frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{m^2 - h^2}{l^2 - h^2}},$$

R, l, m, h étant respectivement le rayon du cercle ~~inscrit~~ circonscrit, la bissectrice, la médiane et la hauteur partant d'un même sommet. *(E. Lemoine.)*

70. — Dans un triangle ABC, si h_1, h_2, h_3 sont les trois hauteurs partant de A, B, C, x, y, z les distances du point de concours des hauteurs aux côtés BC, AC, AB, on a

$$\frac{1}{h_3 z} + \frac{1}{h_2 y} = \frac{h_1 + x}{h_1 x (h_1 - x)}.$$

(Em. Lemoine.)

71. — Dans un triangle ABC, on mène les bissectrices BD, CF des angles en B et C, et la droite DF. Démontrer que si d'un point quelconque M de DF, on abaisse les perpendiculaires MP, MQ, MN respectivement sur AB, AC, BC, on a

$$MN = MP + MQ.$$

(D. André.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 286-3.

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

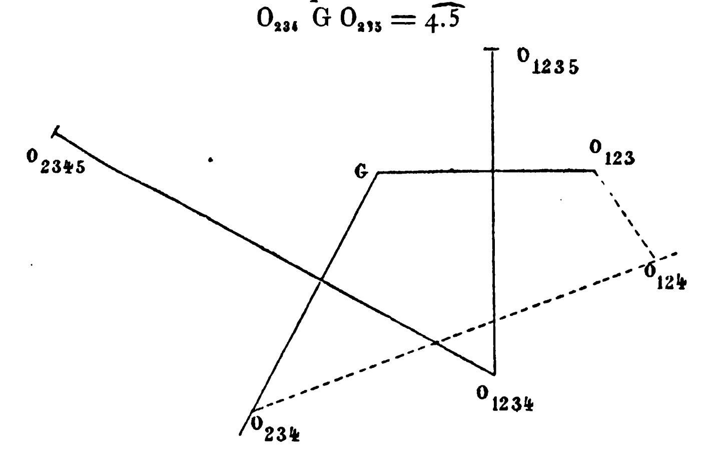
Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 3.)

8. — **Théorème III.** — *Soit un polygone complet formé par les cinq droites* 1, 2, 3, 4, 5; *soit fait abstraction de l'une d'entre elles, de la droite* 5 *par exemple. Au quadrilatère complet* 1, 2, 3, 4, *correspond un cercle d'ordre quatre, cercle précédemment défini : les cinq circonférences d'ordre quatre ainsi obtenues, en faisant successivement abstraction des droites données, vont passer par un même point.*

En effet G désignant le point, autre que O_{123}, qui est commun aux circonférences d'ordre quatre O_{1234}, O_{1235}, nous venons de montrer que l'on avait

$$O_{234}\ G\ O_{235} = \widehat{4.5}$$



D'autre part, d'après la remarque établie au théorème I, on a

$$O_{234}\ O_{345}\ O_{235} = \widehat{4.5}$$

De ces deux égalités il résulte que les angles

$$O_{234}\ G\ O_{235} \text{ et } O_{234}\ O_{345}\ O_{235}$$

sont égaux ou supplémentaires. Dans l'un et l'autre cas, le quadrilatère G O_{234} O_{345} O_{235} est inscriptible. Mais le cercle

circonscrit au triangle O_{234} O_{345} O_{235} est précisément le cercle d'ordre quatre O_{2345}.

Ainsi les trois cercles O_{1234}, O_{1235}, O_{2345} passent par le même point; par suite l'on peut conclure que les cinq cercles d'ordre quatre passent par le même point.

9. — Remarquons maintenant que la ligne O_{1234} O_{1235} est perpendiculaire sur G O_{123}; et O_{1234} O_{2345} sur G O_{234}. Considérons le point O_{124}; les trois points O_{123}, O_{124}, O_{234} sont situés sur la circonférence O_{1234}, laquelle, nous venons de le remarquer, passe par le point G. Ainsi les deux droites O_{1234} O_{2345}, O_{1234} O_{1235} forment un système superposable à celui des droites O_{124} O_{123}, O_{124} O_{234}. D'ailleurs nous avons reconnu (§ 4) que l'angle O_{123} O_{124} O_{234} était égal à l'angle des deux droites qu'on obtenait en retranchant aux indices extrêmes les numéros qui leur sont communs. On a donc

$$O_{123}\, O_{124}\, O_{234} = \widehat{1.4};$$

par suite $$O_{1235}\, O_{1234}\, O_{2345} = \widehat{1.4}.$$

Nous pouvons alors énoncer la propriété suivante :

Si l'on considère trois cercles d'ordre quatre: O_α, O_β, O_γ, *l'angle* $O_\alpha\, O_\beta\, O_\gamma$ *est égal à celui des deux droites dont les numéros s'obtiennent en retranchant aux indices extrêmes les chiffres qui leur sont communs.*

10. — Appliquons cette remarque aux trois angles

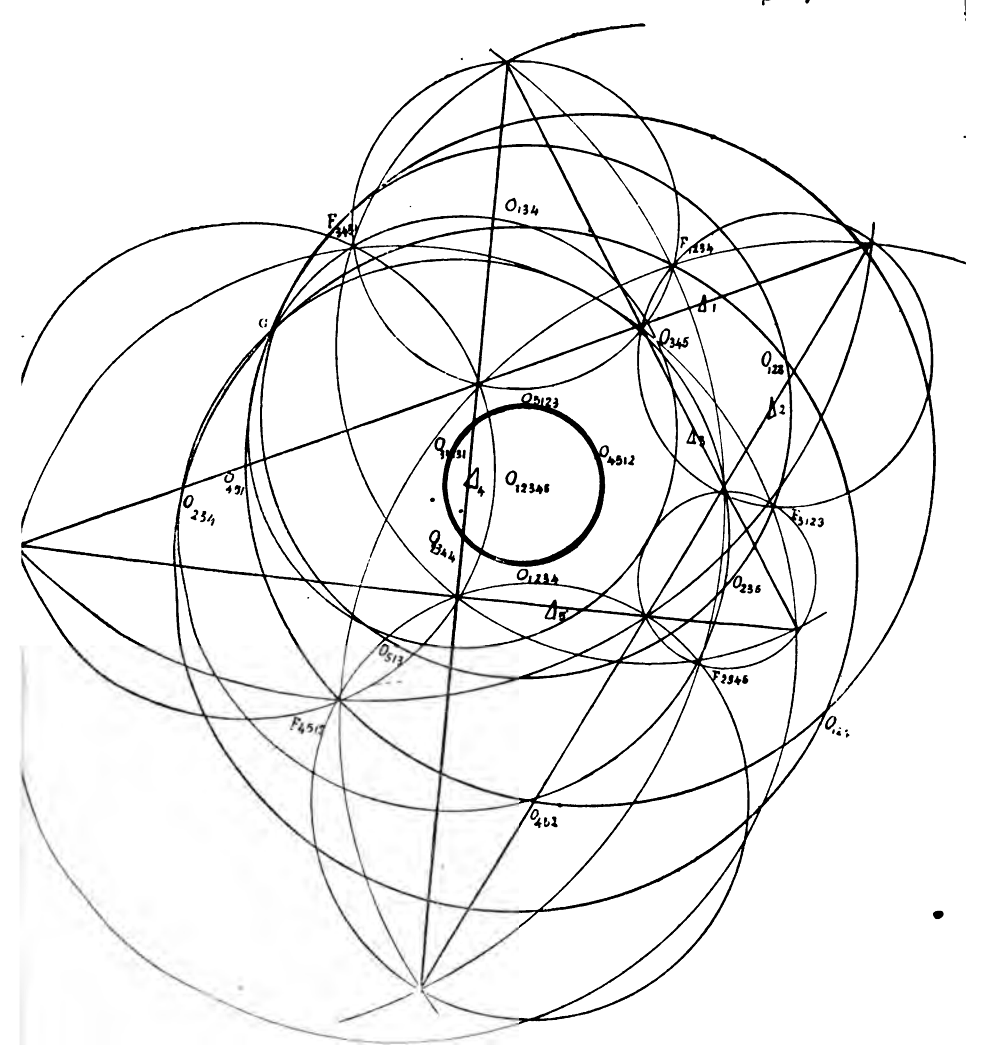
$$O_\alpha\, O_\beta\, O_\gamma,\quad O_\beta\, O_\gamma\, O_\alpha,\quad O_\gamma\, O_\alpha\, O_\beta;$$

on reconnaît que le triangle formé par les trois points O_α, O_β, O_γ a des angles égaux ou supplémentaires deux à deux de ceux du triangle formé par les numéros qui ne sont pas communs aux trois indices $\alpha\ \beta\ \gamma$.

Pour préciser ce point considérons les trois centres d'ordre quatre $$O_{1234},\ O_{2345},\ O_{3451}.$$

Il y a nécessairement aux trois indices deux numéros communs; ici ce sont les chiffres 3 et 4. Les autres numéros sont 1, 2, 5 : les angles du triangle O_{1234} O_{2345} O_{3451} sont deux à deux égaux à ceux du triangle 1 2 5 ou deux à deux supplémentaires des angles de ce triangle. Mais deux triangles qui jouissent de cette propriété ont, comme l'on sait, leurs

angles nécessairement égaux deux à deux, et sont par conséquent semblables. Nous dirons donc : *Le triangle* O_α O_β O_γ



formé par trois centres d'ordre quatre est semblable au triangle déterminé par les trois droites dont les numéros s'obtiennent en

supprimant aux trois indices α, β, γ *les deux numéros qui leur sont communs.*

11. — Théorème IV. — *Les centres des cinq circonférences d'ordre quatre qui correspondent à un pentagone formé par cinq droites indéfinies et deux à deux concourantes sont situés sur une même circonférence. Cette circonférence est d'ordre cinq.*

Il résulte, en effet, de la remarque que nous venons de faire (§ 9), que les angles obtenus en joignant les deux points O_{1234}, O_{2345} successivement à chacun des points

$$O_{1235},\ O_{1245},\ O_{1345}$$

sont tous les trois égaux à l'angle $\widehat{1.5}$. Les cinq points O d'ordre quatre sont donc situés sur une même circonférence. C'est cette circonférence d'ordre cinq que nous désignons par la notation O_{12345}.

12. — Théorème V. — *Lorsque cinq droites* 1 2 3 4 5 *sont tangentes à une même parabole, les cinq circonférences d'ordre quatre passent par le foyer de la courbe.*

Considérons, en effet, les trois circonférences d'ordre quatre

$$O_{1234},\ O_{2345},\ O_{3451}$$

qui se coupent au point G (théorème III). En dehors de ce point G ces circonférences se coupent deux à deux aux points O_{234}, O_{134}, O_{345}.

Les droites GO_{134}, GO_{345} sont perpendiculaires, respectivement sur les droites

$$O_{1234}\,O_{3431} \quad \text{et} \quad O_{3451}\,O_{2345}.$$

On a donc $\quad O_{134}\,GO_{345} = O_{1234}\,O_{3431}\,O_{2345}.$

Mais nous avons vu (§ 9) que l'on avait

$$O_{1234}\,O_{3451}\,O_{2345} = \widehat{1.5}.$$

On a donc finalement

$$O_{134}\,GO_{345} = \widehat{1.5}.$$

Le point F, par où passent tous les cercles d'ordre trois, dans l'hypothèse où les cinq droites sont tangentes à une même parabole, jouit précisément (§ 4) de cette propriété. Cette remarque s'appliquant aux indices 1, 2, 3, 4, 5 combinés deux à deux de toutes les façons possibles, on peut conclure que

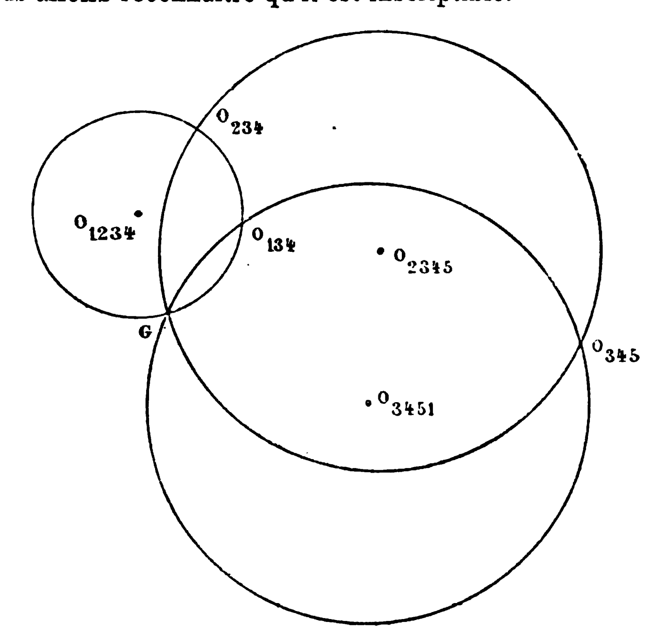
le point G coïncide avec le foyer F de la parabole tangente aux cinq droites proposées.

13. — Théorème VI. — *La circonférence d'ordre cinq qui correspond aux cinq droites 1, 2, 3, 4, 5; lorsqu'on suppose qu'elles sont tangentes à une même parabole, passe par le foyer de cette courbe.*

En effet, considérons le quadrilatère

$$GO_{1234}\,O_{2345}\,O_{3451};$$

nous allons reconnaître qu'il est inscriptible.



On a vu (§ 7) que l'angle $O_\alpha\,G\,O_\beta$ pour des points O d'ordre quatre était égal à celui des deux droites dont les numéros s'obtenaient en retranchant aux indices α et β les chiffres communs.

D'après cela on a donc

$$O_{1234}\,G\,O_{3451} = \widehat{2\,.\,5}.$$

On a vu aussi (§ 9) que l'angle $O_\alpha\,O_\beta\,O_\gamma$ pour des points O d'ordre quatre était égal à celui des droites dont les numéros

s'obtenaient en supprimant les deux chiffres communs aux indices α, γ. On peut donc écrire

$$O_{1234}\, O_{2345}\, O_{3451} = \widehat{2 \,.\, 5}.$$

Le quadrilatère considéré est donc inscriptible. D'ailleurs le cercle circonscrit au triangle $O_{1234}\, O_{2345}\, O_{3451}$, c'est le cercle O_{12345}; on peut donc dire que le cercle O d'ordre cinq passe par le point G foyer de la parabole inscrite au pentagone proposé.

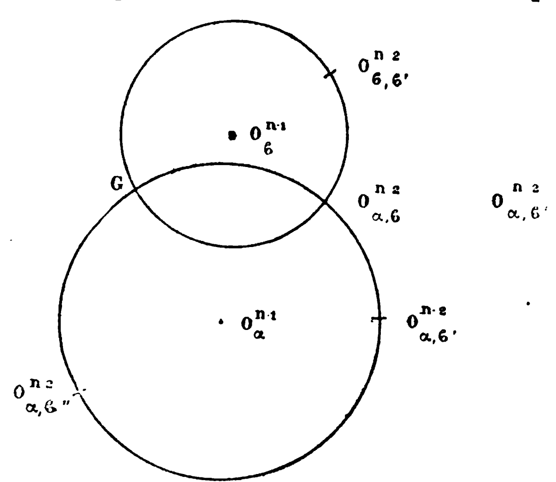
14. — Les théorèmes V et VI sont des cas particuliers des théorèmes généraux que nous avons donnés plus haut en supposant cinq droites quelconques et non pas cinq droites tangentes à une même parabole. Ces cas particuliers ont été retrouvés par M. Ritschie (*). Il nous reste à montrer comment on étend à n droites *quelconques du plan* les théorèmes III et IV.

Nous indiquerons d'abord, à propos de cette généralisation, la notation qu'il nous paraît bon d'employer pour exposer les raisonnements nécessaires à cette généralisation. Le point sur lequel on effectue une étude de géométrie récurrente étant désigné par P, nous l'affecterons de deux indices. *L'indice supérieur indique l'ordre du point; l'indice inférieur représente le numéro de la droite qui a été supprimée pour considérer le point en question.* D'après cela P^{α}_{β} désigne un point P d'ordre α obtenu en considérant $(\alpha + 1)$ droites, parmi lesquelles on a supprimé celle qui portait le numéro β. Lorsqu'il n'y a pas d'indice inférieur à la lettre P, lorsqu'on écrit P^n on entend représenter par là le point P d'ordre n qui correspond aux droites $1, 2, \ldots n$. De même $P^{n-2}_{\alpha\beta}$ désigne le point P d'ordre $(n - 2)$ qui correspond au polygone complet obtenu en supprimant les droites α, β, et ainsi de suite. Ces notations peuvent présenter quelque difficulté, quand on les emploie pour la première fois; mais elles sont indispensables à une étude de géométrie récurrente.

15. — Il est maintenant facile de comprendre comment

(*) *Messenger of mathematics*, vol. IV, p. 127. — *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1877, p. 147.

on pourra passer de l'étude des polygones de $(n-1)$ droites à celle du polygone de n droites. On admettra les propriétés



établies ci-dessus pour tous les points P d'ordre $(n-2)$ qui se déduisent, d'après la loi étudiée, des polygones de $(n-1)$ droites; on démontrera que ces propriétés appartiennent encore aux points P d'ordre $(n-1)$ obtenus avec un polygone de n droites, quand on fait successivement abstraction de l'une d'entre elles. Les théorèmes démontrés pour les points P d'ordre $(n-1)$ subsisteront donc pour les points P d'ordre n.

Considérons les trois points d'ordre $(n-2)$

$$O^{n-2}_{\alpha\beta},\ O^{n-2}_{\alpha\beta'},\ O^{n-2}_{\alpha\beta''}. \qquad (A)$$

Le cercle qui passe par ces trois points, cercle qui renferme tous les points O^{n-2}, $O^{n-2}_{\alpha,2}$, etc., a pour centre le point que nous désignons par O^{n-2}_{α}. Considérons de même le cercle O^{n-1}_{β}. Ces deux circonférences ont un point commun, savoir : $O^{n-2}_{\alpha\beta}$: nous désignerons par G le second point d'intersection de ces deux circonférences.

Les points (A) sont trois points d'ordre $(n-2)$ appartenant au polygone d'ordre $(n-1)$, $\left(\frac{1.2\ldots\ldots n}{\alpha}\right)$; si l'on

convient de désigner ainsi les $(n - 1)$ droites qui se déduisent des droites proposées $1, 2. \dots n$; en supprimant celle qui est numérotée α.

On peut appliquer aux points (A) la propriété du § 9; on a donc

$$O^{n-2}_{\alpha\beta}\, O^{n-2}_{\alpha\beta''}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'} = \widehat{\beta, \beta'}. \qquad (1)$$

Prenons maintenant sur la circonférence O^{n-1}_{β} le point $O^{n-2}_{\beta,\beta'}$ qui est certainement situé sur elle ; ceci résulte de la définition même de cette circonférence O^{n-1}_{β}. De l'égalité (1) on conclut

$$O^{n-2}_{\alpha\beta'}\, G\, O^{n-2}_{\alpha\beta} = \widehat{\beta, \beta}. \qquad (2)$$

Cette égalité constitue un principe, duquel on déduit

$$O^{n-2}_{\beta\beta'}\, G\, O^{n-2}_{\alpha\beta} = \widehat{\alpha, \beta'}. \qquad (3)$$

Des égalités (2) et (3) on tire

$$O^{n-2}_{\beta\beta'}\, G\, O^{n-2}_{\alpha\beta'} = \widehat{\alpha, \beta}. \qquad (4)$$

Ceci posé, considérons les trois points

$$O^{n-2}_{\beta\beta'}\, O^{n-2}_{x\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'}$$

qui sont trois points d'ordre $(n - 2)$ du polygone

$$\left(\frac{1 \,.\, 2 \,\dots\, n}{\beta'}\right).$$

On sait que l'on a (§ 9)

$$O^{n-2}_{\beta\beta'}\, O^{n-2}_{x\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'} = \widehat{\alpha, \beta}. \qquad (5)$$

En comparant (4) et (5) on voit que le cercle $O^{n-1}_{\beta\beta'}\, O^{n-2}_{x\beta'}\, O^{n-2}_{\alpha\beta'}$ passe par le point G. Tous les cercles O^{n-1}_{1}, O^{n-2}_{2},... passent donc par le même point G.

On voit ensuite, en raisonnant comme nous l'avons fait plus haut (théorème IV), que les n points d'ordre $(n - 1)$ appartiennent à une même circonférence. Cette circonférence passe par le point G, quand les n droites sont tangentes à une même parabole, et ce point G est alors le foyer de cette courbe.

Nous pouvons donc finalement énoncer le théorème suivant :

Théorème général. — *Soit un système de* n *droites*

$$1, 2, 3, \dots n$$

deux à deux concourantes ; faisons abstraction de l'une d'entre

elles : nous obtiendrons (n — 1) *droites formant un polygone complet auquel correspond un point d'ordre* (n — 1) *et une circonférence d'ordre* (n — 1) *définis par la loi de récurrence que nous avons développée. Cette loi qui prend pour point de départ la considération des cercles circonscrits aux triangles formés par les quatre droites d'un quadrilatère complet, conduit aux conclusions suivantes :*

1° *Les* n *circonférences ainsi obtenues passent par un même point* G;

2° *Les centres de ces circonférences sont situés sur une même circonférence* O;

3° *Dans le cas particulier où les* n *droites enveloppent une même parabole, le point* G *est le foyer de la courbe et la circonférence* O *passe par ce point.*

(A suivre.)

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. A. Morel.

(*Suite*, voir p. 10.)

5. — Lorsque le triangle a une forme particulière, on peut trouver facilement la valeur de l'angle α, et par suite la position des points ω et ω'.

Si le triangle est équilatéral, il est évident que l'angle α est égal à 30°; les points ω et ω' sont confondus au centre du triangle. Du reste, la formule qui donne α devient alors

$$\text{cotg}\,\alpha = 3\,\text{cotg}\,A = \sqrt{3}.$$

Donc $\alpha = 30°$.

Si le triangle est isoscèle, on a $B = C = \frac{\pi - A}{2}$. Donc

$$\text{cotg}\,\alpha = \text{cotg}\,A + 2\,\text{tg}\,\frac{A}{2}.$$

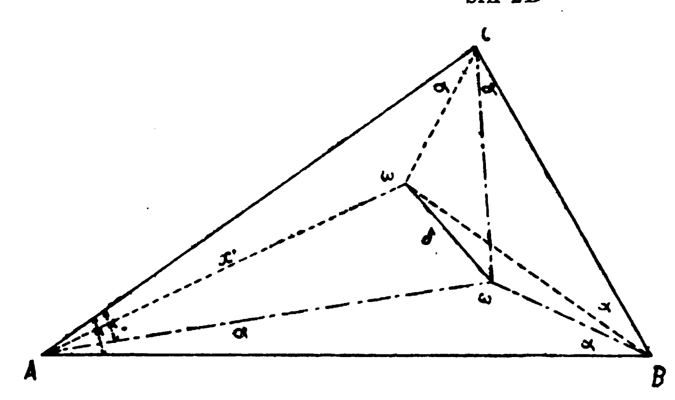
En remplaçant cotg A par $\frac{1}{2}\,\text{cotg}\,\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\,\text{tg}\,\frac{A}{2}$, on trouve

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{3}{2}\,\text{tg}\,\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\,\text{cotg}\,\frac{A}{2} = \frac{2\cos A}{\sin A},$$

Lorsque le triangle est rectangle

$$A = \frac{\pi}{2}, \text{ et } B = \frac{\pi}{2} - C;$$

on a alors $\quad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} B + \operatorname{tg} B = \frac{2}{\sin 2B}.$



6. — Cherchons dans le cas général la distance des deux points ω et ω'. Soient d cette distance, ωBA, ωCB les angles égaux à α. En désignant Aω et Aω' par x et x', on a

$$x = \frac{c \sin \alpha}{\sin A}; \quad x' = \frac{b \sin \alpha}{\sin A}.$$

Le triangle $\omega\omega'$A nous donne

$$\delta^2 = x^2 + x'^2 - 2xx' \cos (A - 2\alpha).$$

Si nous remplaçons x et x' par leurs valeurs, nous trouvons

$$\delta^2 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = b^2 + c^2 - 2bc \cos (A - 2\alpha);$$

d'autre part nous avons

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A;$$

donc $\quad \delta^2 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = a^2 - 4bc \sin \alpha \sin (A - \alpha).$

Nous trouverions de même très facilement les valeurs

$$\delta^2 \frac{\sin^2 B}{\sin^2 \alpha} = b^2 - 4ca \sin \alpha \sin (B - \alpha),$$

$$\delta^2 \frac{\sin^2 C}{\sin^2 \alpha} = c^2 - 4ab \sin \alpha \sin (C - \alpha).$$

En égalant les deux premières valeurs de δ^2, nous avons

$$\frac{a^2 - 4bc \sin\alpha \sin(A - \alpha)}{\sin^2 A} = \frac{b^2 - 4ca \sin\alpha \sin(B - \alpha)}{\sin^2 B}.$$

Cette relation donne, après réduction,

$$\frac{b \sin(A - \alpha)}{\sin^2 A} = \frac{a \sin(B - \alpha)}{\sin^2 B}$$

ou encore $\sin^3 B \sin(A - \alpha) = \sin^3 A \sin(B - \alpha)$

d'où nous tirons

$$\cot g A = \frac{\sin^3 B \cos A - \sin^3 A \cos B}{\sin A \sin B \sin C \sin(B - A)};$$

Mais on a

$$\frac{\sin^3 B \cos A - \sin^3 A \cos B}{\sin(B - A)} = \sin^2 A + \sin B \sin C \cos A;$$

par conséquent, nous retrouvons ici l'expression déjà obtenue pour $\cot g \alpha$:

$$\cot g \alpha = \frac{\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A}{\sin A \sin B \sin C}.$$

7. — La discussion de la valeur que nous venons d'indiquer pour la valeur de δ conduit à un résultat intéressant.

Nous avons trouvé l'égalité

$$\delta^2 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = a^2 - 4bc \sin\alpha \sin(A - \alpha).$$

Or on a aussi

$$\sin(A - \alpha) = \frac{\sin\alpha \sin^2 A}{\sin B \sin C}.$$

Donc on trouve

$$\delta^2 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = a^2 - 4bc \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 A}{\sin B \sin C}.$$

Mais, d'autre part, dans le triangle ABC, on a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

On en tire facilement

$$\frac{\delta^2 \sin^2 A}{\sin^2 \alpha} = a^2(1 - 4 \sin^2 \alpha),$$

et par suite on a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\delta}{\sin\alpha \sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}} = 2R,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Cette intéressante relation entre δ, l'angle α et le rayon, nous apprend en outre que, pour que l'on ait des valeurs réelles, il faut que l'angle α ne dépasse pas 30 degrés; car cet angle est évidemment aigu et son sinus, comme nous le voyons, ne peut surpasser $\frac{1}{2}$.

On pourrait, du reste, obtenir ce résultat en partant immédiatement de la formule

$$\cot g\,\alpha = \cot g\,A + \cot g\,B + \cot g\,C.$$

Les angles A, B, C, étant les angles d'un triangle, on a

$$\cot g\,C = -\cot g\,(A + B).$$

Donc

$$\cot g\,\alpha = \cot g\,A + \cot g\,B - \cot g\,(A + B).$$

Supposons d'abord l'angle A constant; il suffit donc de chercher le maximum ou le minimum de

$$\cot g\,B - \cot g\,(A + B),$$

ou de

$$\frac{2 \sin A}{\cos A - \cos(A + 2B)}.$$

Cette expression, essentiellement positive, passera par un minimum pour $\cos(A + 2B) = -1$

ou $A + 2B = \pi$.

Mais déjà $A + B + C = \pi$;

donc $B = C$,

et par suite, pour une valeur donnée de A, α deviendra maximum lorsque le triangle sera isoscèle, les côtés égaux étant ceux qui comprennent l'angle A.

Cherchons maintenant pour quelle valeur de A la fonction

$$\cot g\,\alpha = \cot g\,A + 2\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}$$

devient minima.

Nous avons vu que cette expression pouvait se mettre sous la forme

$$\cot g\,\alpha = \frac{3\,\mathrm{tang}^2 \frac{A}{2} + 1}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}};$$

il est alors facile de voir qu'elle passe par un minimum pour

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

alors $$A = 60^\circ,$$

et par conséquent le triangle est équilatéral.

(A suivre.)

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **E. Catalan** (*).

1. — *Annexes d'un triangle.* — Soient M, N, P les points

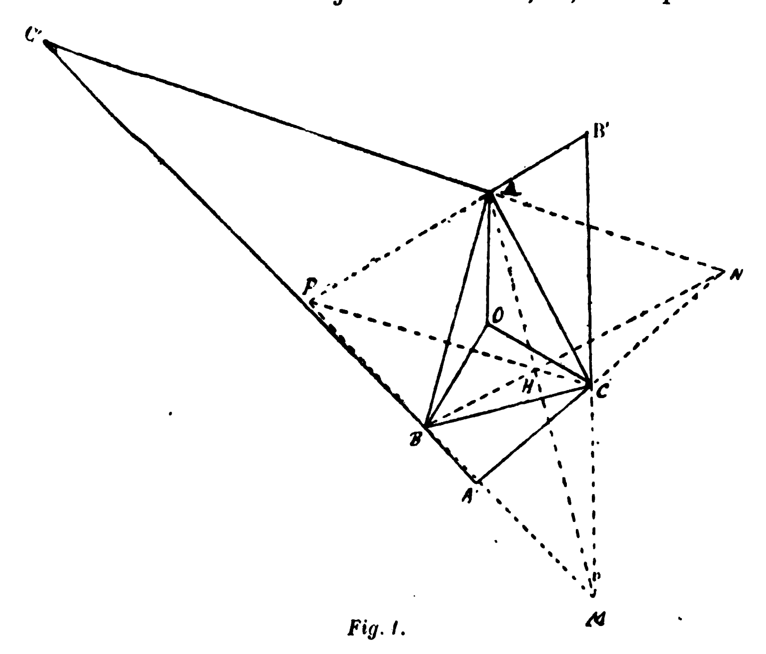


Fig. 1.

symétriques des sommets A, B, C d'un triangle, relativement aux côtés BC, CA, AB. Si l'on mène les droites PB, NC,

(*) Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. IV, nos 9, 10, 1882.

elles déterminent en général, avec BC, un triangle BCA′ (*), que l'on peut appeler *annexe* de ABC, suivant BC. De même, CAB′, ABC′ sont des annexes. Ces triangles jouissent de propriétés assez remarquables.

2. — *Angles des annexes.* — Soit Bx le prolongement de AB. D'après la construction,

$$A'Bx = PBA = CBA = B;$$

donc $A'BC = 2^d - 2B.$

De même, $BCA' = 2^d - 2C.$

Par conséquent, $A' = 2^d - 2A.$ (**)

Ainsi, *les angles de l'annexe suivant* BC *sont les suppléments des doubles des angles de* ABC. Il en est de même pour les deux autres annexes. Conséquemment, *les trois annexes sont semblables* ; et, en outre :

$$A'BC = ABC' = B',$$
$$BCA' = ACB' = C',$$
$$BAC' = CAB' = A'.$$

3. — Remarque. — Soit O le centre du cercle inscrit au triangle ABC. L'angle *au centre*, BOC, est double de A. Donc $BOC + A' = 2^d$: *le quadrilatère* BOCA′ *est inscriptible*. De même COAB′, AOCA′ sont des *quadrilatères inscriptibles* (***).

4. — *Hexagone des annexes.* — Dans l'hexagone

A′C B′A C′B A′,

les angles en A′, B′, C′ ont pour valeur, respectivement :

$$2^d - 2A, \ 2^d - 2B, \ 2^d - 2C.$$

L'angle en A égale

$$CAB' + A + BAC' = 2A' + A = 4^d - 3A.$$

Donc *l'angle extérieur* (****) B′AC′ *est le triple de* A. Semblablement : angle ext. B′CA = 3C,

angle ext. C′BA′ = 3B.

(*) Il est visible que, si l'angle A est droit, les lignes PB, NC sont parallèles entre elles. Cette conclusion résulte, d'ailleurs, des valeurs suivantes.

(**) Lorsque $A = 1^d$, A′ est nul, conformément à la remarque précédente.

(***) Nous reviendrons sur cette propriété.

(****) L'expression : *angle extérieur*, n'a pas, ici, la signification habituelle.

5. — Remarques. — I. La somme des angles *intérieurs*, en A, B, C, est $12^d - 3(A + B + C) = 6^d$;
donc *un au moins de ces trois angles surpasse deux droits.*

II. *L'hexagone est non convexe.*

III. *La somme des angles intérieurs, en* A', B', C', *égale deux droits.*

6. — Théorème. — *1° La droite* AA', *qui joint un sommet de* ABC *au sommet correspondant d'une annexe* BCA', *contient le centre* O *de la circonférence circonscrite au premier triangle et le centre* α *de la circonférence inscrite à l'annexe ; 2° le second centre est situé sur la première circonférence.*

Soient B*f* perpendiculaire à BA, C*g* perpendiculaire à CA. D'après la *définition* (1), ces droites sont bissectrices des angles CBA', BAC'; dont elles se coupent au centre α du cercle inscrit à l'annexe.

En second lieu, la circonférence décrite sur Aα, comme diamètre, contient les sommets B, C: elle est circonscrite au triangle ABC.

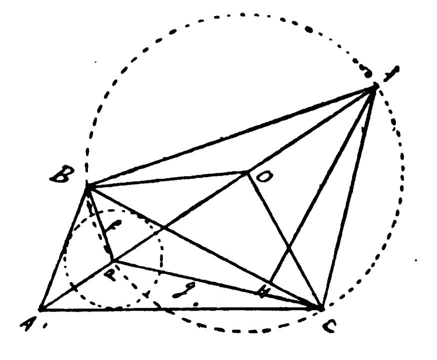


Fig. 2.

Menons la droite αA', laquelle est bissectrice de l'angle A'. Nous aurons

$$B\alpha A' = 2^d - \frac{1}{2}(A' + B') = A + B;$$

et, parce que BαA, BCA sont inscrits au même segment,

$$B\alpha A = BCA = C.$$

Donc $B\alpha A' + B\alpha A = A + B + C = 2^d$,
A'αOA *est une ligne droite.*

7. — Corollaires. — I. *Si, dans le cercle* O, *la corde* BC *est fixe, et que le point* A *soit mobile, le lieu du point* A' *est un arc de la circonférence* BOC (3).

II. *Si, au contraire, le point* A *est fixe, et que la corde* BA *soit mobile, le lieu du point* A′ *est le prolongement du diamètre passant en* A (*).

8. — *Autre construction de l'annexe.* — Soit α le point diamétralement opposé à A, dans la circonférence circons-

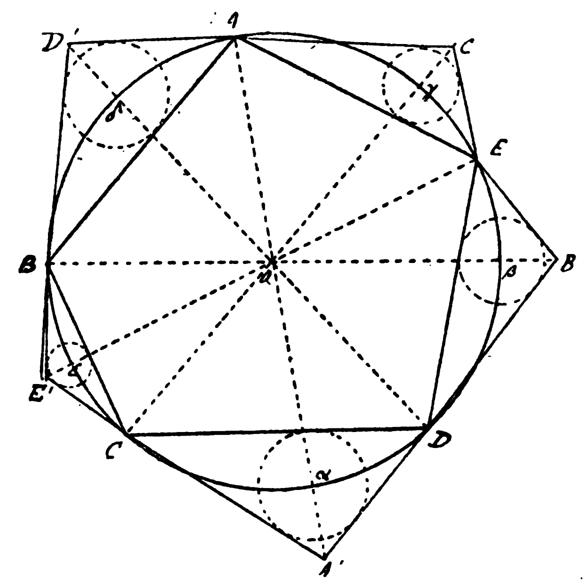


Fig 8.

crite au triangle ABC. De ce point, comme centre, décrivez la circonférence tangente au côté BC. Des extrémités de ce côté menez les tangentes BA′, CA′ : elles se coupent en un point A′, situé sur AOα ; et BA′. C'est l'annexe demandée.

9. — *Annexes d'un polygone inscrit, ayant un nombre impair de côtés.* — Soit, par exemple, le pentagone ABCDE, inscrit à la circonférence O. La construction indiquée ci-contre détermine les annexes DA′C, EB′D, ... ; puis le décagone AC′EB′D ..., dans lequel *les diagonales se coupent au centre du cercle donné* (*). *(A suivre.)*

(*) On verra, tout à l'heure, comment on doit prendre la *corde mobile* pour que le point A′ soit *fixe*.

QUESTION 32

Solution par E. MOSNAT, à Thiers.

Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations $ax^2 + bx + c = 0$

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0$$

aient une racine commune est que l'une ou l'autre de ces équations ait ses racines égales. (Lauvernay.)

Si les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

ont une racine commune, elle sera racine de l'équation obtenue en éliminant x^2 entre les deux équations précédentes, c'est-à-dire égale à $\dfrac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha}$.

Portons cette valeur de x dans la première équation ; nous aurons

$$a(c\alpha - a\gamma)^2 + b(c\alpha - a\gamma)(a\beta - b\alpha) + c(a\beta - b\alpha)^2 = 0;$$

telle est la condition pour que les deux équations aient une racine commune.

Développons et ordonnons par rapport à α, β, γ, et supprimons le facteur commun a, différent de zéro, il vient

$$c^2\alpha^2 + ac\beta^2 + a^2\gamma^2 + (b^2 - 2ac)\alpha\gamma - b\beta(c\alpha + a\gamma) = 0.$$

Dans le cas particulier considéré on a

$$c\alpha + a\gamma = \frac{b\beta}{2}$$

et par suite $$c^2\alpha^2 + a^2\gamma^2 = \frac{b^2\beta^2}{4} - 2ac\alpha\gamma.$$

Portons ces valeurs dans la condition donnée, on obtient après simplifications

$$\left(\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma\right)(b^2 - 4ac) = 0,$$

si a est différent de zéro ; il faut donc que l'on ait

$$b^2 - 4ac = 0$$

ou $$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0.$$

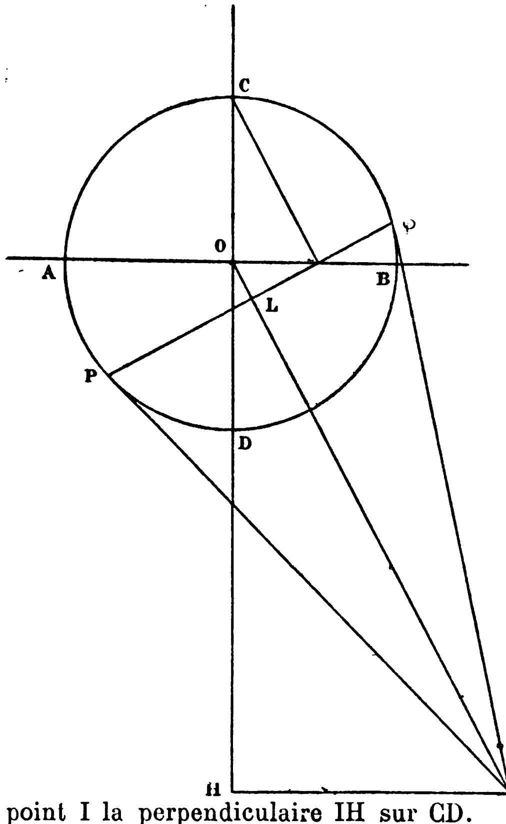
c'est-à-dire que l'une ou l'autre des équations ait ses racines égales.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gino-Loria, à Mantoue ; Lachesnais, lycée Saint-Louis.

QUESTION 51

Solution par M. M. VAZOU.

On considère un cercle O *et deux diamètres rectangulaires* AB, CD; *on joint le point* C *à un point* M *pris arbitrairement sur* AB, *et en ce point* M *on élève à* CM *une perpendiculaire qui rencontre* O *aux points* P *et* Q; *si en ces points* P *et* Q *on mène les tangentes au cercle, ces droites se coupent en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand le point* M *se déplace sur* AB. (G. L.)



Menons OI qui rencontre PQ en L, et abaissons du point I la perpendiculaire IH sur CD.

On a $$OI = \frac{R^2}{OL}.$$

La similitude des triangles OCM et OML donne

$$OL = \frac{OM^2}{CM},$$

par suite on a $$OI = R^2 \times \frac{CM}{OM^2},$$

ce qui peut s'écrire $$\frac{OI}{CM} = \frac{R^2}{OM^2};$$

mais la similitude des triangles OCM, HOI donne

$$\frac{OI}{CM} = \frac{IH}{OM};$$

par suite $$IH = \frac{R^2}{OM}; \quad IH^2 = \frac{R^4}{OM^2}.$$

La similitude des mêmes triangles donne également

$$\frac{OH}{R} = \frac{OI}{CM} = \frac{R^2}{OM^2},$$

ce qui donne $$\frac{OH}{R} = \frac{IH}{OM},$$

ou $$\frac{IH}{OH} = \frac{OM}{R} = \frac{R}{IH}.$$

Donc $$IH^2 = R.OH,$$

ce qui montre que les points I appartiennent à une parabole ayant pour sommet O et pour paramètre $\frac{R}{2}$.

Nota. — La même question a été résolue par M. Deville, à Lorient.

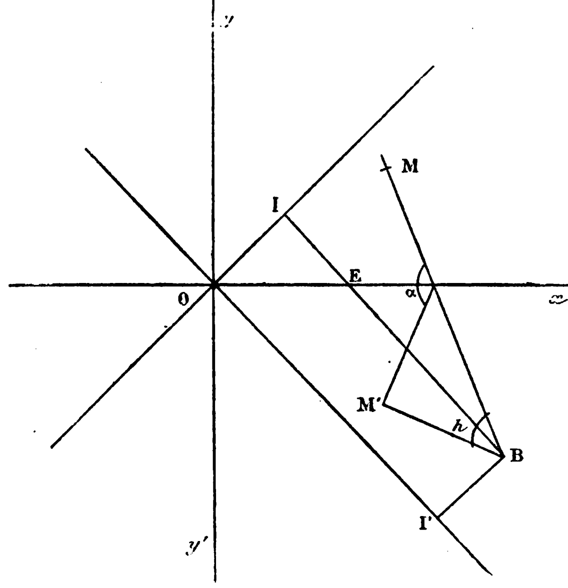
QUESTION 55

Solution par M. Ch. Mascart, élève au Lycée Henri IV.

On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy, *et dans un plan une courbe* φ *quelconque, mais symétrique par rapport à* Ox. *Soit* M *un point de la courbe; on mène la normale en* M *à* φ; *puis ayant pris le point* M', *symétrique de* M *par rapport à* Ox, *point qui est sur* φ, *par hypothèse, on mène la tangente à* φ

au point M'*; cette tangente et la normale en* M *donnent deux droites. On considère les bissectrices de leur angle et, du point* O, *on abaisse des perpendiculaires sur ces bissectrices. Lieu des pieds de ces perpendiculaires.*

Appelons α l'angle MAM' des normales à φ en M et M';



h l'angle MBM' de la normale en M et de la tangente en M'; BE, BE' les bissectrices de cet angle et I, I', les projections du point O sur ces bissectrices.

Nous avons

$$h = 1 \text{ dr.} - \text{BAM}' = \alpha - 1 \text{ dr.}$$

$$\text{AEB} = 2 \text{ dr.} - \left(\frac{h}{2} + \text{EAB}\right) = \frac{1}{2} \text{ dr.}$$

$$\text{XOI} = 1 \text{ dr.} - \text{IEO} = \frac{1}{2} \text{ dr.}$$

On a de même $\quad \text{XOI}' = \frac{1}{2} \text{ dr.}$

Le lieu cherché se compose donc de deux droites situées dans le plan de φ, se coupant en O sur l'axe Ox et inclinées à 45° sur cet axe.

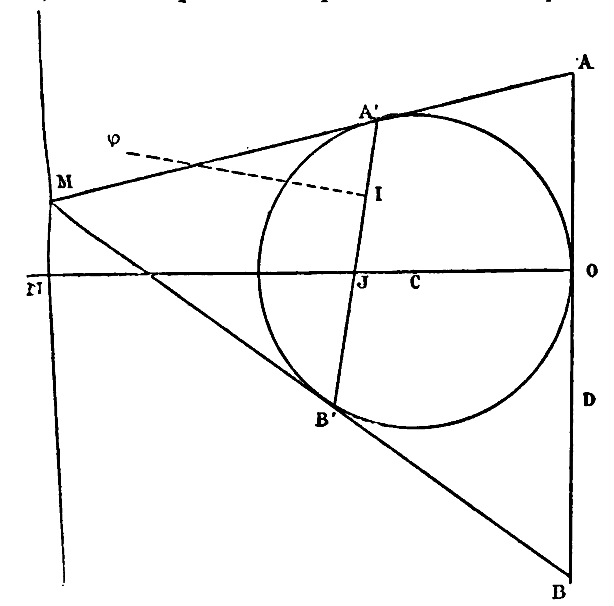
Le plan de φ pouvant occuper toutes les positions possibles autour de Ox, l'ensemble de toutes les positions de la courbe sera une surface de révolution d'axe Ox, et le lieu sera un cône à deux nappes d'axe Ox, de sommet O, et d'angle au sommet égal à 45°.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Deville, à Lorient; Julien Sauve à Moulins; Lenoir, Louvet et de Berthes, collège Stanislas; H., S. lycée de Toulouse.

QUESTION 57

Solution par M. Jacob, lieutenant d'artillerie de marine, à Lorient.

On considère un cercle C *et une droite* D *tangente à* C *au point* O; *sur* D *on prend deux points* A *et* B *tels que* $OA.OB$



$= K^2$; K *étant une ligne donnée par ces points* A *et* B, *on mène à* C *des tangentes; soient* A' *et* B' *les points de contact. D'un point fixe* P *pris dans l'espace on abaisse sur* A'B' *une perpendiculaire* PI. *Trouver le lieu décrit par le point* I.

Du point P de l'espace abaissons une perpendiculaire Pφ sur le plan du cercle, la droite φI sera perpendiculaire à A'B' et la question revient à trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point φ sur A'B'.

Soit M le point d'intersection de AA' et de BB', je dis que le lieu du point M est une parallèle à la tangente AB. Pour le prouver abaissons MB perpendiculaire à AO, évaluons de deux manières l'aire du triangle MAB. On a

$$MP\,(OA + OB) = 2r\,(OA + OB + MA'),$$

r désignant le rayon du cercle donné.

Or le rayon r est donné en fonction des côtés par la formule

$$pr^2 = (p - a)(p - b)(p - c),$$

ou ici

$$(OA + OB + MA')\,r^2 = OA.OB.MA';$$

tirons de là la valeur de MA' :

$$MA' = \frac{(OA + OB)\,r^2}{OA.OB - r^2} = \frac{(OA + OB)\,r^2}{K^2 - r^2},$$

donc

$$MP = \frac{2r\left(OA + OB + \dfrac{(OA + OB)\,r^2}{K^2 - r^2}\right)}{OA + OB},$$

$$MP = \frac{2K^2r}{K^2 - r^2}.$$

MP est donc constant et par suite le lieu du point M est une parallèle à AB. Il suit de là que la corde des *contacts* A'B' passe par le pôle de cette droite Δ et la distance de ce point au point O s'obtient aisément.

Soit J ce point, on a

$$CJ.CN = r^2,$$

$$CN = \frac{2K^2r}{K^2 - r^2} - r,$$

$$CN = \frac{(K^2 + r^2)\,r}{K^2 - r^2},$$

$$CJ = \frac{r\,(K^2 - r^2)}{K^2 + r^2};$$

la droite A'B' passant par le point fixe J, le lieu I est le cercle décrit sur φJ comme diamètre.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Santol, à Toulouse; Julien Sauve, à Moulins.

BIBLIOGRAPHIE

Traité d'algèbre élémentaire, par M. **J. Collin**, ancien élève de l'École polytechnique. Paris, librairie Gauthier-Villars.

L'algèbre de M. Collin est faite à un point de vue absolument pratique, et cette qualité la rend particulièrement recommandable pour les élèves qui, devant préparer des examens élémentaires, ont à se préoccuper du calcul algébrique.

Le calcul proprement dit prend place maintenant même dans les compositions du baccalauréat ès sciences; cette année encore, dans plusieurs facultés on a donné des expressions à simplifier ou des systèmes d'équations littérales à résoudre. Et cependant combien sont peu nombreux les élèves qui savent calculer! Cela tient à ce que tous les petits détails et artifices qui constituent réellement le calcul ne s'enseignent qu'oralement et ne sont indiqués explicitement dans aucune Algèbre imprimée jusqu'ici. M. Collin a voulu combler cette lacune, il a pris ces petits détails un à un, au fur et à mesure qu'ils se présentent dans l'exposition générale de la théorie, les explique, les développe et après chacun d'eux traite quelques exemples et propose des exercices; de cette manière il familiarise l'élève avec le calcul algébrique.

Pour les maxima et les minima, l'auteur commence par énoncer explicitement plusieurs axiomes; puis il résout dix types généraux des problèmes et fait suivre chacun d'eux de quelques exemples.

Les candidats au baccalauréat trouveront aussi dans ce livre tous les problèmes importants sur l'équation générale du second degré, tels que la somme des puissances semblables des racines, la condition pour que deux équations aient des racines communes, etc.

Quant aux élèves qui se préparent à Saint-Cyr, ou à l'École forestière, les chapitres sur les radicaux, les inégalités, les indéterminations apparentes leur seront fort utiles. Pour l'étude de la variation des fonctions, l'auteur emploie la méthode directe qui évite tout tâtonnement, et fait, en outre, sur la fraction du second degré plusieurs remarques importantes, et bien propres à guider les élèves; nous signalerons ce qu'il appelle les courbes élémentaires de la fraction

Enfin, pour résumer ce que nous pensons de ce livre, nous dirons que, avec ses 150 exemples résolus, et ses 400 exercices proposés, il constitue un excellent guide pour les élèves sérieux, qui veulent arriver aux examens avec une préparation complète pour l'algèbre, cette partie importante dans les compositions écrites. A. M.

QUESTIONS PROPOSÉES

72. — Résoudre le système

$$xy(x+y) = ab(a+b)$$
$$(x-y)(x+2y)(2x+y) = (a-b)(a+2b)(2a+b).$$

(*E. Lucas.*)

73. — On considère une parabole P, de foyer F et de directrice Δ. Démontrer que les tangentes communes à P et au cercle décrit de F comme centre avec le paramètre pour rayon : 1° se coupent sur l'axe en un point symétrique de F par rapport à Δ; 2° que l'angle de ces tangentes est de 60°. *(G. L.)*

74. — On donne une droite Δ, et trois points A, B, C, en ligne droite; soit M un point quelconque de Δ; par le point B, on mène une droite qui rencontre MA au point I, et MC au point I′; on suppose d'ailleurs que BI = BI′. Trouver le lieu du point I et celui du point I′. *(G. L.)*

75. — On donne un quadrilatère inscriptible ABCD dont les diagonales se rencontrent en M. Du point M on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés du quadrilatère. Les pieds de ces perpendiculaires forment un nouveau quadrilatère αβγδ; on propose de démontrer que ce quadrilatère est circonscriptible. *(I. H. S.)*

76. — On propose de résoudre les deux équations

$$\frac{x\,[x^2+y^2-d\,(x+y)]}{(y+x-d)\,(x^2+y^2)}=\frac{a}{d};$$

$$y\,\frac{x^2+y^2-d\,(x+y)}{(y+x-d)\,(x^2+y^2)}=\frac{b}{d};$$

on vérifiera que les formules demandées s'obtiennent par la simple permutation des lettres a et x d'une part; b et y de l'autre. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2610-3.

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir pages 3 et 25.)

DEUXIÈME APPLICATION

Étude de géométrie récurrente sur la droite de Simson.

16. — On sait que *si d'un point* M *pris sur une circonférence* O *on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle, triangle dont les sommets* 1, 2, 3 *sont situés sur* O, *les pieds de ces perpendiculaires sont situés sur une droite* Δ_{123}.

Ce théorème est dû à Simson. Nous appellerons *droite de Simson* cette droite Δ_{123}, et pour rappeler qu'elle est obtenue au moyen de trois points pris sur la circonférence (abstraction faite du point M), nous dirons qu'elle est d'ordre trois et qu'elle correspond au point M. Enfin pour mieux distinguer ce point M, nous le nommerons *point fondamental.*

Prenons maintenant quatre points 1, 2, 3, 4 sur la circonférence O. Si nous faisons successivement abstraction de l'un de ces points, nous obtiendrons quatre triangles : à chacun d'eux, et au point M, correspond une droite de Simson d'ordre trois, ces quatre droites sont liées les unes aux autres par des propriétés que nous allons établir.

17. — **Théorème.** — *Le triangle formé par trois quelconques des droites de Simson d'ordre trois*

$$\Delta_{123} \quad \Delta_{234} \quad \Delta_{341} \quad \Delta_{412} ;$$

droites qui correspondent aux quatre points 1,2,3,4 *de la circonférence* O, *est semblable au triangle que l'on obtient en supprimant aux trois indices considérés le numéro qui leur est commun.*

Considérons en effet la droite de Simson Δ_{123}, qui correspond au point M . Les angles marqués α et β sur la figure sont égaux, puisque le quadrilatère $3.M.H_{13}.H_{23}$ est inscriptible. D'autre part l'angle β est complémentaire de l'angle $M.3.H_{23}$,

angle qui est égal à M.1.2 (*fig. 1*). Cette remarque conduit d'abord à la propriété suivante : *une droite de Simson d'ordre trois* Δ_{123} *est inclinée sur l'un des côtés du triangle, sur le côté* 1.3, *par exemple, d'un angle aigu qui est égal au complément de celui sous lequel la corde* 2.M *est vue d'un point quelconque de la circonférence* O.

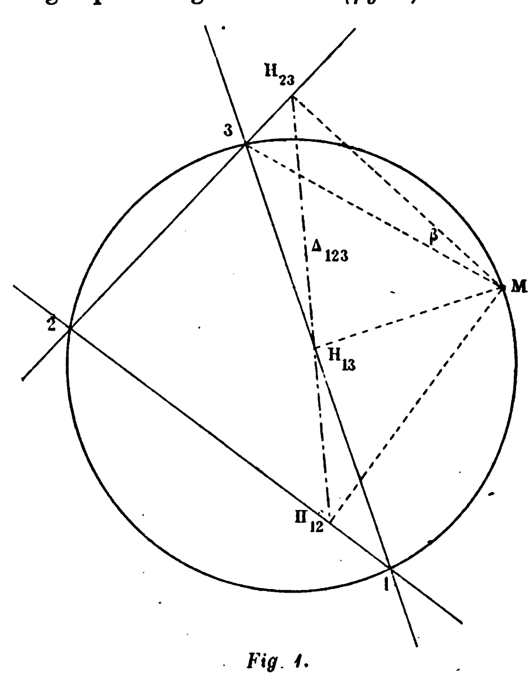


Fig. 1.

Considérons maintenant quatre points 1, 2, 3, 4; sur la circonférence O, et les deux droites Δ_{123}, Δ_{124} qui correspondent au point M et aux deux triangles 123, 124. Ces deux droites, conformément à leur définition même, ont pour point commun H_{12}, projection du point M sur le côté 1.2. Ces droites Δ_{123}, Δ_{124} sont, d'après la remarque que nous venons de faire, inclinées sur le côté 1.2 d'angles qui sont respectivement égaux à ceux sous lesquels on voit les cordes 3.M et 4.M d'un point quelconque de O. On conclut de là que le système des deux droites Δ_{123} Δ_{124} est superposable au faisceau des deux droites 3.M et 4.M (*fig. 2*).

On peut, d'après cela, énoncer cette seconde propriété : *Si l'on considère quatre points* 1, 2, 3, 4 *sur une circonférence* O *et deux droites* Δ, *de Simson d'ordre trois, correspondant à ces points, ces deux droites forment un faisceau qui est superposable à celui des droites qui joignent le point fondamental* M

aux deux points dont les indices ne sont pas communs aux deux droites Δ considérées.

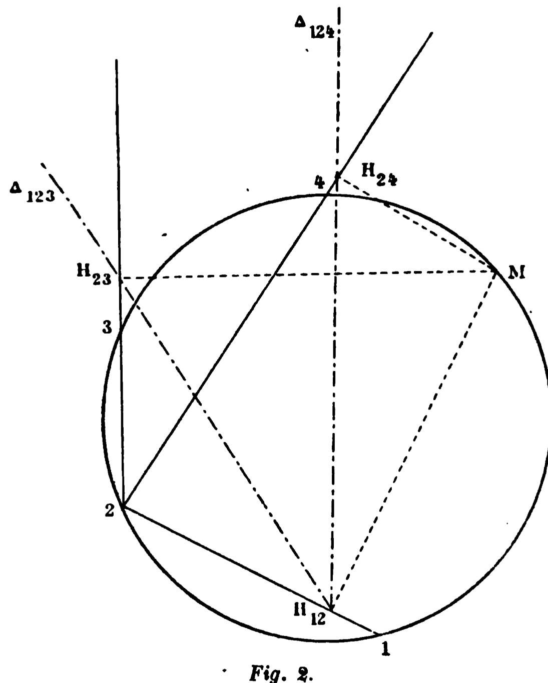
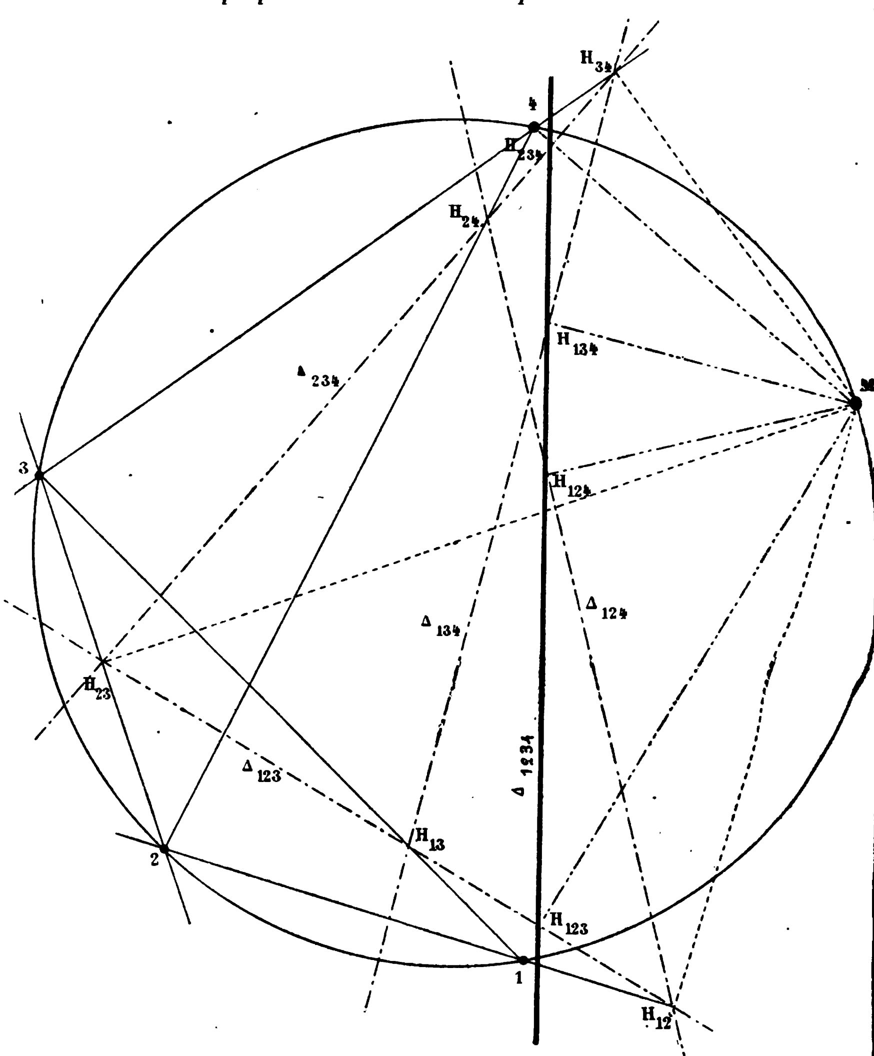


Fig. 2.

Considérons maintenant trois droites de Simson d'ordre trois : Δ_{123} Δ_{124} Δ_{134} ; elles forment un triangle dont les angles sont égaux à ceux qu'on obtient en joignant le point M aux points 2, 3 et 4 ou sont supplémentaires de ceux-ci. On peut donc dire que les angles du triangle Δ_{123} Δ_{124} Δ_{134} sont deux à deux égaux à ceux du triangle 234, ou sont supplémentaires de ces angles. Mais on sait que deux triangles dont les angles sont égaux ou supplémentaires ont nécessairement les angles égaux et, par suite, sont semblables. Nous pouvons donc conclure que les deux triangles Δ_{123} Δ_{124} Δ_{134} et 2. 3. 4 sont semblables. Le théorème énoncé se trouve donc démontré, et il conduit immédiatement à la droite de Simson d'ordre quatre, droite définie comme nous allons le dire.

18. — Théorème. — *Si du point fondamental* M *on abaisse des perpendiculaires sur les quatre droites de Simson*



d'ordre trois qui correspondent aux points 1, 2, 3, 4, *les quatre points ainsi obtenus sont situés sur une droite : nous nommerons*

cette droite droite de Simson d'ordre quatre, et nous la désignerons par Δ_{1234}.

Considérons en effet les trois points

$$H_{12}, \quad H_{13}, \quad H_{14},$$

projections respectives du point fondamental sur les cordes 1.2, 1.3, 1.4. Le triangle formé par ces trois points est, justement, celui des droites que nous désignerons par

$$\Delta_{123}, \ \Delta_{124}, \ \Delta_{134},$$

D'après ce que nous venons de voir, ce triangle est semblable au triangle 2 3 4; on a donc en particulier

$$\Delta_{123}\Delta_{134}\Delta_{124} = 3.1.4 \qquad (1)$$

D'ailleurs les droites MH_{13}, MH_{14} sont perpendiculaires respectivement sur les droites 1.3 et 1.4 : on a donc (*fig.* 3)

$$H_{13}MH_{14} = 3.1.4. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on voit que le quadrilatère $M\ H_{12}\ H_{13}\ H_{14}$ est inscriptible; propriété qui est d'ailleurs évidente, ces quatre points appartenant au cercle décrit sur la droite 1.M comme diamètre.

Cette remarque étant faite, si l'on applique le théorème de Simson au point M et au triangle $H_{12}\ H_{13}\ H_{14}$, on obtient, en projetant ce point M sur les côtés de ce triangle, trois points $H_{123}\ H_{124}\ H_{134}$ qui sont situés en ligne droite. Du moment que parmi les quatre points $H_{123}\ H_{124}\ H_{134}\ H_{234}$ trois sont en ligne droite, il est évident que ces quatre points sont situés sur une même droite. Nous convenons de dire que cette droite est une droite de Simson d'ordre quatre et nous la désignerons par Δ_{1234}.

19. — Pour poursuivre l'étude de ces droites de Simson, il faudrait, du moins en obéissant aux idées générales que nous avons précédemment exposées, chercher la loi géométrique qui lie la droite de Simson d'ordre quatre avec les droites de Simson d'ordre trois. On reconnaît ainsi, et sans difficulté, que *la droite* Δ_{1234} *fait avec* Δ_{123} *un angle égal au complément de l'angle inscrit à la circonférence* O *et dont l'un des côtés passe par le point* M, *tandis que l'autre passe par le point 4.*

Mais il se présente, dans cette question, une condition

particulière qui permet de reconnaître immédiatement le théorème général.

Prenons sur la circonférence O, cinq points 1, 2, 3, 4, 5; et considérons trois droites de Simson d'ordre 4,

$$\Delta_{1234}, \quad \Delta_{1245}, \quad \Delta_{1235}.$$

Ces droites peuvent être obtenues de la façon suivante. Imaginons le point H_{12} et les trois droites de Simson d'ordre trois qui partent de ce point

$$\Delta_{123}, \quad \Delta_{124}, \quad \Delta_{125}.$$

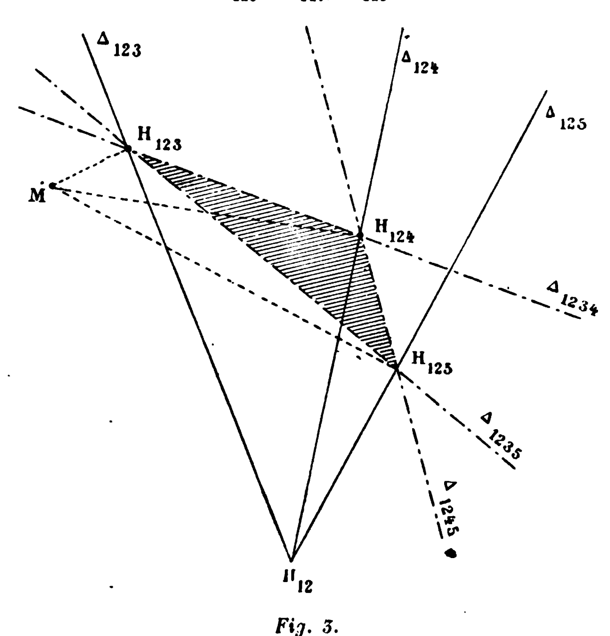


Fig. 3.

Si nous projetons le point M sur ces droites, on obtient les points H_{123} H_{124} H_{125}
et la droite H_{123} H_{124}, par exemple, n'est autre chose, d'après ce que nous avons dit au paragraphe précédent, que la droite de Simson d'ordre quatre Δ_{1234}. Ainsi le triangle H_{123} H_{124} H_{125} est justement le triangle des droites Δ_{1234} Δ_{1245} Δ_{1235}.

Ceci posé, le cercle décrit sur $H_{12}M$, comme diamètre, passe évidemment par les points H_{123} H_{124} H_{125}; le théorème de

Simson prouve donc que les pieds H_{1234} H_{1245} H_{1235} des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés de ce triangle sont trois points en ligne droite.

Aux cinq points considérés 1, 2, 3, 4, 5 correspondent cinq droites de Simson d'ordre quatre, et nous venons de reconnaître que si l'on projette le point M sur trois de ces droites, on obtenait trois points en ligne droite. De là il résulte nécessairement que les cinq points sont en ligne droite. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnés cinq points* 1,2,3,4,5 *sur une circonférence* O *on considère les cinq droites* Δ *de Simson d'ordre quatre, droites précédemment définies et qui correspondent à un certain point* M *de* O ; *les projections du point* M *sur les droites* Δ *sont cinq points situés en ligne droite. Cette droite désignée par la notation* Δ_{12345} *est dite droite de Simson d'ordre cinq.*

20. — On voit maintenant comment on peut établir par un procédé calqué, pour ainsi dire, sur la démonstration précédente, le théorème général relatif aux droites de Simson.

Nous admettons la conception et les propriétés des droites de Simson d'ordre inférieur à n et nous voulons démontrer l'existence de la droite de Simson d'ordre n. A cet effet, nous imaginerons le point $H_{1.2\ldots(n-3)}$ et les droites de Simson d'ordre $(n - 2)$.

$$\Delta_{1.2\ldots(n-3)(n-2)} \quad \Delta_{12\ldots(n-3)(n-1)} \quad \Delta_{12\ldots(n-3)n}$$

droites qui, nécessairement, et d'après leur définition même, passent par ce point. Du point fondamental M on abaisse des perpendiculaires sur ces droites et en obtient trois points

$$H_{12\ldots(n-3)(n-2)}, \quad H_{12\ldots(n-3)(n-1)}, \quad H_{12\ldots(n-3)n}$$

qui, joints deux à deux, donnent trois droites de Simson d'ordre $(n - 1)$

$$\Delta_{12\ldots(n-3)(n-2)(n-1)}, \quad \Delta_{12\ldots(n-2)(n3-n)}, \quad \Delta_{12\ldots(n-3)(n-1)n}.$$

Si maintenant on remarque que le cercle décrit sur la droite $MH_{12\ldots(n-3)}$ comme diamètre est circonscrit au triangle formé par ces trois droites, on voit que les projections du point fondamental sur *trois* droites de Simson d'ordre $(n - 1)$ sont en ligne droite. Mais alors les n projections

sont en ligne droite et nous résumerons ces propriétés sur la droite de Simson dans l'énoncé suivant :

Théorème général. — *Étant donnés* n *points sur une circonférence, si l'on fait successivement abstraction de l'un d'entre eux, on obtient* (n — 1) *points auxquels correspond une droite de Simson d'ordre* (n — 1) ; *droite définie précédemment, correspondant à un point* M *de la circonférence* O. *Si du point* M *on abaisse des perpendiculaires sur ces* n *droites, les* n *points ainsi obtenus sont situés sur une droite. Cette droite désignée par la notation* $\Delta_{12\ldots n}$ *est dite droite de Simson d'ordre* n.

21. — C'est cette propriété que nous visions plus particulièrement dans cette étude et, dans le but d'abréger la démonstration, nous avons, à un certain moment, comme on a pu le remarquer, abandonné l'étude des positions respectives des droites de Simson des différents ordres. Mais si l'on avait voulu poursuivre, par la méthode normale, l'étude des droites de Simson, on aurait facilement démontré la propriété suivante :

Théorème. — *Le triangle formé par trois droites de Simson d'ordre* (n — 1) *est semblable au triangle dont les numéros s'obtiennent en supprimant, aux indices considérés, les numéros qui leur sont communs;*

Et aussi celle-ci :

Théorème. —*La droite de Simson d'ordre* n, Δ_α, *fait avec une droite de Simson d'ordre* (n — 1), Δ_β *un angle égal au complément de l'angle inscrit à la circonférence donnée, angle dont les côtés passent : l'un par le point fondamental* M, *l'autre par le point dont le numéro n'est pas commun aux indices* α *et* β.

(A suivre.)

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. E. Catalan.

(*Suite*, voir page 37.)

10. — *Circonférence des neuf points* (fig. 4). — Supposons que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle FGH. La circonférence O devient *la circonférence des neuf points* (milieux des côtés, pieds des hauteurs, milieux des segments compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs), relative à ce triangle. D'après le théorème (6), *cette circonférence contient les centres* α, β, γ *des cercles inscrits aux annexes de* ABC; *et ces centres sont diamétralement opposés à* A, B, C. (*)

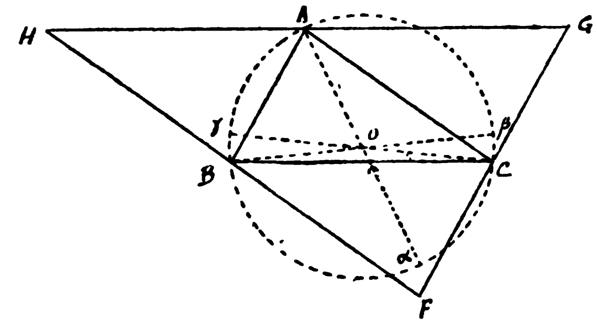


Fig. 4.

Voilà donc *trois* points ajoutés aux *neuf* (**) que l'on connaissait (***).

11. — *Cercles ex-inscrits aux annexes* (fig. 5). — A'A est la bissectrice de l'angle A' (6). Le côté BA, perpendiculaire à

(*) En outre, *les quadrilatères* AC'EO, EB'DO, DA'CO, CE'BO, BD'AO *sont inscriptibles.*

(**) Ou plutôt aux *quinze*. (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6me édit., p. 177.)

(***) Je fais abstraction, bien entendu, des points remarquables, *en nombre indéfini*, où la circonférence O touche certains cercles. *Loc. Cit.*, p. 181.

la bissectrice Bα de A'BC, est bissecteur de l'angle *extérieur* A'Bx. Pour la même raison, CA' est la bissectrice de A'Cy.

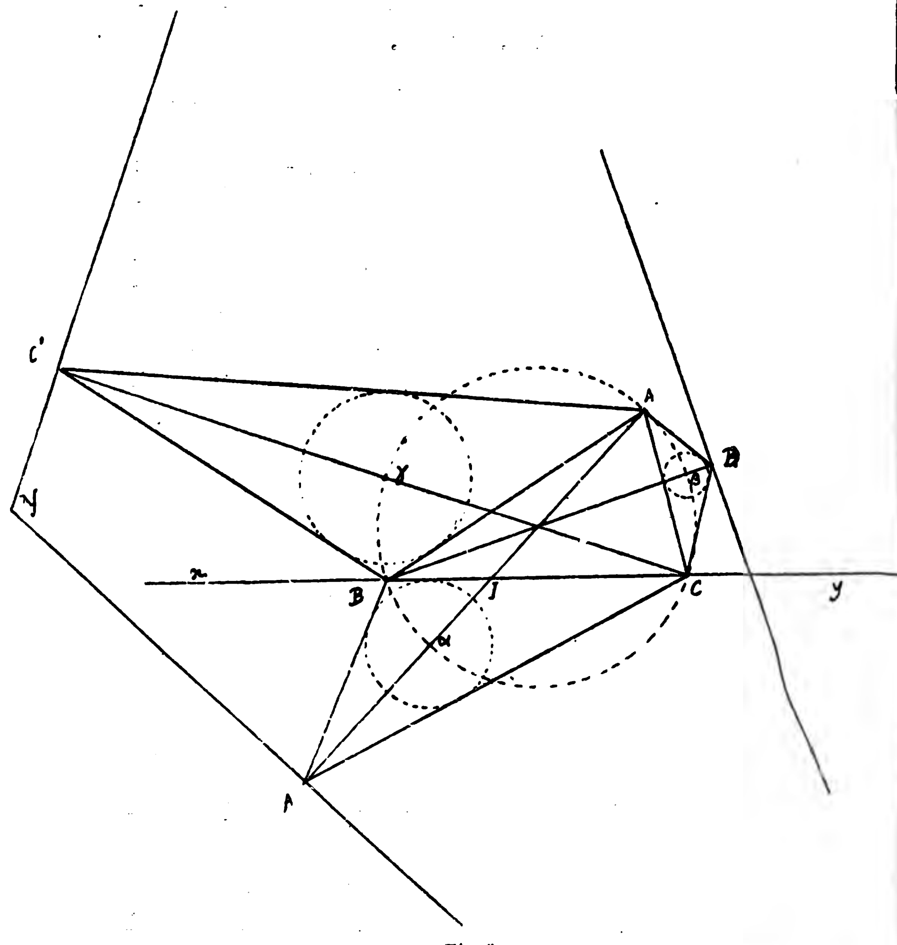


Fig. 5.

Donc A *est le centre du cercle ex-inscrit à l'annexe* BCA', *tangent au côté* BC. *Le rayon de ce cercle est la hauteur* AH.

Considérons les deux autres cercles ex-inscrits à BCA'. Le centre de l'un est l'intersection de AB avec la droite YZ, menée par A', perpendiculairement à A'A; le centre de

l'autre est l'intersection de cette même droite YZ avec AC. Par conséquent :

Les centres des cercles ex-inscrits aux trois annexes sont :

1° *Les sommets du triangle* ABC;

2° *Les intersections des côtés de ce triangle avec les droites* YZ, ZX, ZY, *menées par* A', B', C', *perpendiculairement à* A'A, B'B, C'C.

12. — Remarque. — Ces droites sont parallèles aux tangentes, en A, B, C, au cercle O.

13. — Lemme (fig. 6). — *Soit* ABC *un triangle isoscèle, inscrit à un cercle* O. *Si l'on trace la corde* AD, *coupant en* E *la base du triangle, on a*

$$AD.AE = \overline{AB}^2.$$

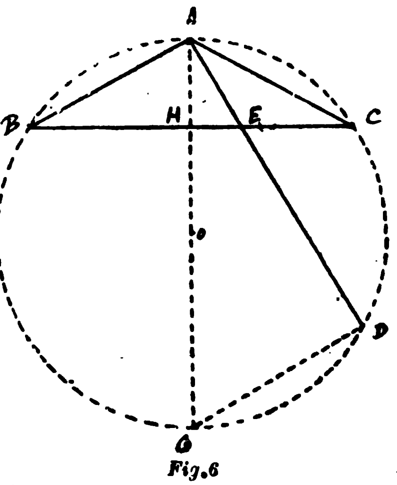


Fig. 6

Menons le diamètre AOG et la corde GD. Le quadrilatère DEHG, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible(*). Donc

$$AD.AE = AG.AH.$$

D'après un théorème connu, le second membre égale $AB.AC = \overline{AB}^2$; donc la proposition est démontrée.

14. — *Relation métrique.* — Le lemme précédent, appliqué à la figure 5, donne

$$OA' = \frac{OB.OC}{OI} = \frac{R^2}{OI},$$

puis

$$AA' = R\frac{AI}{OI},$$

ou

$$\frac{R}{AA'} = \frac{OI}{AI}.$$

(*) Autrement dit, les triangles ABG, AHE sont semblables.

De même $\frac{R}{BB'} = \frac{OK}{BK'}$, $\frac{R}{CC'} = \frac{OL}{CL}$.

Par conséquent

$$\frac{R}{AA'} + \frac{R}{BB'} + \frac{R}{CC'} = \frac{OI}{AI} + \frac{OK}{BK} + \frac{OL}{CC}.$$

Mais il est connu (et évident) que la somme des trois derniers rapports se réduit à l'unité (*). Donc enfin

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{R};$$

relation semblable à celle qui existe entre les rayons des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle (**). Par suite, on peut *construire un triangle dans lequel ces quatre rayons soient égaux à* R, AA', BB', CC' (***).

15. — **Théorème.** — *Si un triangle inscrit* ABC (fig. 5) *a un sommet fixe* A, *et que le côté* BC *passe par un point fixe* I, *appartenant au diamètre* Aα, *le sommet* A' *de l'annexe est invariable.*

En effet, on vient de voir que

$$OA' = \frac{R^2}{OI}.$$

16. — Remarques. — I. La réciproque est vraie : *Si le sommet* A' *est fixe, toutes les cordes* BC *passent par un point fixe, situé sur* AA'.

II. La propriété qui vient d'être démontrée complète l'une de celles qui l'ont été ci-dessus (7, 11).

III. Les points I, A' sont réciproques (****). Donc *la polaire du point* I *est la droite* YZ (II). De même ZX et XY sont les polaires des points L, K.

17. — *Hexagone de Brianchon* (fig. 7). — Les diagonales

(*) De là résulte que, *dans tout triangle rectiligne,*

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

Cette proposition, également connue, est facile à vérifier directement.

(**) *Théorèmes et Problèmes...*, p. 198.

(***) *Id.*, p. 116.

(****) *Éléments de Géométrie*, p. 114.

de l'hexagone A'CB'AC'B se coupent au point O. Donc *cet hexagone est circonscrit à une conique.*

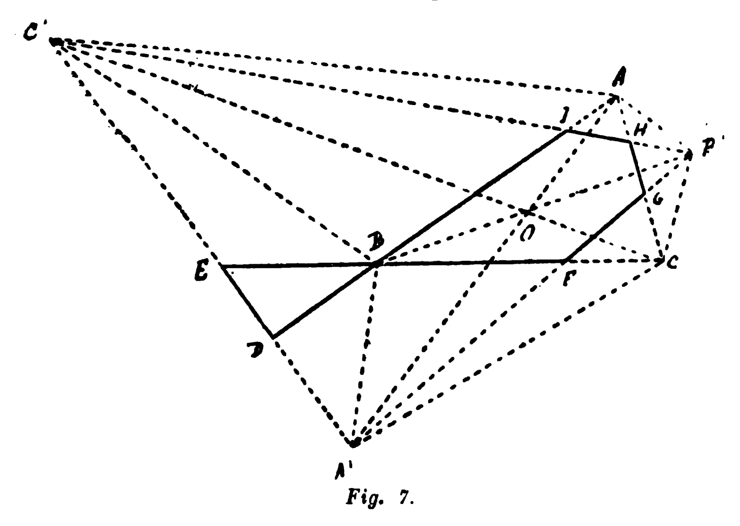


Fig. 7.

18. — *Hexagone de Pascal.* — En 1848, nous avons fait connaître un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon, sont les côtés d'un hexagone de Pascal (*).

On vient de voir que C'BA'CB'A est un hexagone de Brianchon. Donc les droites C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal. *Cet hexagone est* DEFGHI. Autrement dit, *les points* D, E, F, G, H, I *sont situés sur une conique.*

19. — *Circonférence des neuf points.* — Supposons, comme précédemment (10), que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle T (**). Soit O la circonférence des neuf points relative à T, et soient ABC', BCA', CAB' les annexes de ABC. Les dernières remarques donnent lieu à la proposition suivante :

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1852, p. 173 ; *Bulletins de l'Académie*, déc. 1878 ; etc.

(**) Non représenté sur la figure.

1° *L'hexagone* AC'BA'CB *est circonscrit à une conique ;*

2° *L'hexagone* DEFGHI, *formé par les intersections successives des droites* AB, C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB, *est inscrit à une conique.*

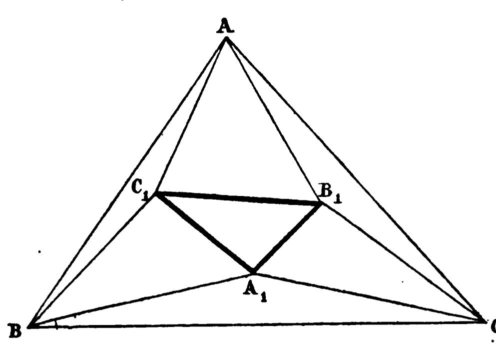
19. — REMARQUE. — Si, comme au n° 9, on remplaçait le triangle ABC par un polygone convenablement choisi, on pourrait généraliser les dernières propriétés. Mais en voilà assez sur ce sujet.

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. **A. Morel.**

(*Suite*, voir pages 10 et 33.)

8. — Si, sur les côtés AB, BC, CA, d'un triangle ABC, on construit des triangles isoscèles semblables ABC_1, CBA_1, CAB_1, les trois points A_1, B_1, C_1, sont les sommets d'un nouveau triangle. Nous allons chercher quelle est la valeur qu'il faut donner à l'angle φ à la base des triangles isoscèles pour que le triangle $A_1B_1C_1$ soit semblable au triangle ABC.



Appelons φ la valeur commune des angles à la base des triangles isoscèles AB_1C, BC_1A, CA_1B ; nous avons évidemment dans le triangle AC_1B_1 :

$$C_1B_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1AB_1 \cos (A - 2\varphi);$$

nous obtiendrons des valeurs analogues pour les deux autres côtés; puis, en remplaçant AC_1, AB_1 par leurs valeurs en fonction des côtés du triangle primitif et de l'angle φ, nous aurons

$$C_1B_1^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos (A - 2\varphi)}{4\cos^2 \varphi}.$$

Cela posé, nous allons chercher si nous pouvons déterminer l'angle φ de façon que le triangle $A_1B_1C_1$ soit semblable au triangle ABC, les sommets homologues étant A et A_1, B et B_1, C et C_1. On devra donc avoir, en remplaçant chacun des côtés du triangle donné par sa valeur en fonction des autres côtés :

$$\frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos(A - 2\varphi)}{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \frac{c^2 + a^2 - 2ca \cos(B - 2\varphi)}{c^2 + a^2 - 2ca \cos B}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos(C - 2\varphi)}{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement une première solution évidente, qui est $\varphi = 0$; nous allons retrouver cette solution dans le calcul même.

En comparant les deux premiers rapports, on trouve facilement, après des transformations très simples, l'équation

$$b(c^2 + a^2) \sin(A - \varphi) \sin \varphi - a(b^2 + c^2) \sin(B - \varphi) \sin \varphi$$
$$- abc \sin(A - B) \sin 2\varphi = 0,$$

ou

$$\sin \varphi \, [b(c^2 + a^2) \sin(A - \varphi) - a(b^2 + c^2) \sin(B - \varphi)$$
$$- 2abc \sin(A - B) \cos \varphi] = 0,$$

ce qui donne d'abord la solution

$$\sin \varphi = 0.$$

L'autre facteur donne

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{b(c^2 + a^2) \cos A - a(b^2 + c^2) \cos B}{b(c^2 + a^2) \sin A - a(b^2 + c^2) \sin B - 2abc \sin(A - B)}$$

Le dénominateur peut se mettre sous la forme

$$b^3 \sin A - a^3 \sin B,$$

et le numérateur sous la forme

$$b^3 \cos A - a^3 \cos B,$$

en remplaçant $c^2 + a^2$ par $b^2 + 2ac \cos B$, et $b^2 + c^2$ par $a^2 + 2bc \cos A$.

Donc on a

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{b^3 \cos A - a^3 \cos B}{b^3 \sin A - a^3 \sin B}.$$

Si, maintenant, je remplace les côtés par les sinus, qui leur sont proportionnels, il vient

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{\sin^3 B \cos A - \sin^3 \cos B}{\sin^3 B \sin A - \sin^3 A \sin B},$$

ce qui devient

$$\text{cotg}\ \varphi = \frac{\sin (B - A) [1 + \cos A \cos B \cos C]}{\sin A \sin B \sin C \sin (B - A)}.$$

En supprimant le facteur commun *sin* (B — A), nous trouvons
$$\text{cotg}\ \varphi = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C}.$$

De cette valeur nous tirons

$$\text{cotg}\ \varphi = \text{cotg}\ A + \text{cotg}\ B + \text{cotg}\ C.$$

Ainsi l'angle φ, que nous obtenons ainsi, n'est pas autre chose que l'angle que nous avons précédemment désigné par α ; de plus, la symétrie de la formule qui donne cotg φ nous montre que, si nous égalions le premier rapport au troisième, nous obtiendrions encore le même angle.

Donc les lignes qui joignent les points de Brocard aux sommets du triangle se coupent en trois points A_1, B_1, C_1, qui sont les sommets d'un triangle semblable au triangle ABC.

La solution $\varphi = 0$, que nous avons trouvée, donne une seconde position du triangle semblable au triangle ABC ; comme les sommets des triangles isoscèles tels que ABC_1 sont toujours sur les perpendiculaires élevées aux côtés du triangle ABC en leurs milieux, il en résulte que le triangle correspondant à la solution $\varphi = 0$ a pour sommets les milieux de ABC; il est évident que ce triangle est semblable au triangle ABC.

9. — Le rapport de similitude des deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ est facile à déterminer; en effet, ce rapport est égal à

$$\frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos (A - 2\alpha)}}{2a \cos \alpha}.$$

Or, nous avons vu précédemment que, δ désignant la distance des points ω et ω', on avait

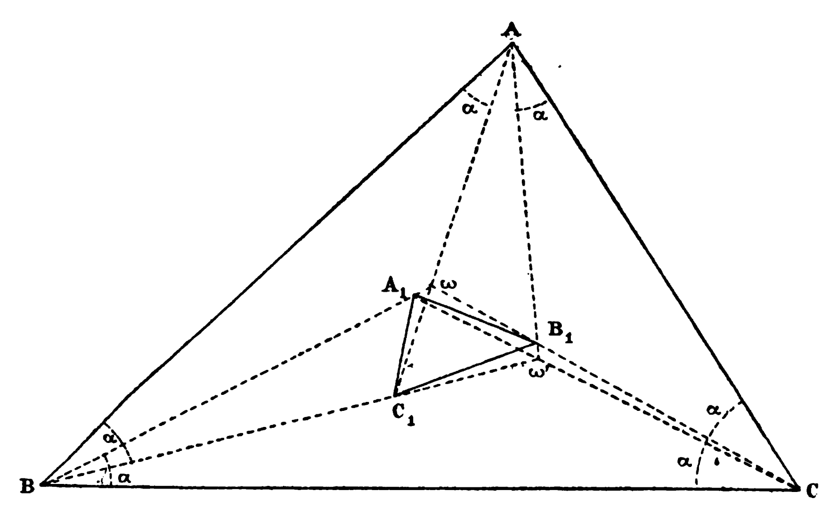
$$\frac{\delta \sin A}{\sin \alpha} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos (A - 2\alpha)};$$

donc le rapport de similitude cherché est, en remplaçant $\frac{\delta \sin A}{a}$ par sa valeur précédemment indiquée,

$$\sin \alpha \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha} :$$

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{\sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}}{2 \cos \alpha}.$$

10. — Considérons le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$; d'après ce que nous venons de dire, le triangle $A_1B_1C_1$ est semblable au triangle ABC, le sommet A_1 étant l'homologue du sommet A, et de même pour les autres sommets. Il en résulte que l'angle A_1 est égal à l'angle A. Mais, d'après la manière dont est déterminé le point ω,



l'angle $A\omega C$ est le supplément de l'angle A du triangle ABC ; par conséquent l'angle $C_1\omega B_1$ est égal à l'angle A.

On verrait de même que l'angle $A_1\omega' C_1$ est égal à l'angle B, et par suite à l'angle B_1 ; donc les points ω et ω' sont sur le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$.

De même, il est facile de voir que si l'on joint les points A_1 et B_1 au centre O (*) du cercle circonscrit au triangle ABC, les lignes ainsi menées, d'après la construction même des points A_1, B_1, C_1, sont les perpendiculaires respectivement aux côtés BC et AC ; de plus, la ligne A_1O est bissectrice de l'angle BA_1C ; par suite elle passe par le milieu de l'arc $\omega A_1 C_1 \omega'$. De même la ligne B_1O est bissectrice de l'angle $\omega B_1 \omega'$; elle passe donc aussi par le milieu de l'arc $\omega A_1 C_1 \omega'$.

(*) Le point O n'est pas marqué sur la figure ; le lecteur est donc prié de faire les constructions qui concernent ce point.

Donc le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ passe par le centre du cercle circonscrit à ABC.

On voit ainsi que

Les droites qui joignent les sommets du triangle ABC *aux points de Brocard relatifs à ce triangle se coupent en trois autres points* A_1, B_1, C_1, *qui sont les sommets d'un triangle semblable au triangle* ABC ; *et que la circonférence qui passe par les points* A_1, B_1, C_1, *passe aussi par les points de Brocard et par le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

C'est ce cercle que nous appelons le CERCLE DE BROCARD.

11. — *L'angle* $\omega O \omega'$ *est égal à* 2α; car il est égal à l'angle $\omega C_1 \omega'$, lequel, étant extérieur au triangle isoscèle AC_1B, est égal à la somme des angles à la base, c'est-à-dire à l'angle 2α.

12. — *Le triangle* $\omega O \omega'$ *est isoscèle.* En effet, l'angle $O\omega\omega'$ est égal à l'angle $OA_1\omega'$; mais celui-ci est égal au complément de α, dans le triangle isoscèle BA_1C; il en résulte que la bissectrice de l'angle en O du triangle $\omega O \omega'$ est perpendiculaire sur le côté opposé; donc le triangle est isoscèle.

13. — Le rayon du cercle de Brocard est facile à déterminer en fonction de l'angle α et du rayon du cercle circonscrit à ABC; on a en effet, en appelant R_1 le rayon de ce cercle, et R le rayon du cercle ABC :

$$\frac{R_1}{R} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

On retrouverait facilement cette formule, en s'appuyant sur le fait que le triangle $\omega O \omega'$ est isoscèle, et que l'angle en O est égal à 2α; on a alors

$$R_1 = \frac{\delta}{2\sin 2\alpha}.$$

Mais nous avons vu (7) que l'on a

$$\frac{\delta}{2\sin\alpha\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}} = 2R.$$

Donc
$$R_1 = \frac{R\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

SUR L'ENVELOPPE D'UNE DROITE MOBILE

Par M. **Deville**, à Lorient.

Déterminer l'enveloppe d'une droite qui intercepte sur deux axes rectangulaires des segments dont la somme est constante.

I. — *Détermination du point de contact.* — Soient deux axes rectangulaires et une droite AB se déplaçant entre ces deux axes de manière que OA + OB = constante = l. Soit A_1B_1 une position voisine (*fig. 1*) ; j'ai, en considérant le triangle OAB coupé par la transversale A_1CB_1,

$$\frac{OB_1}{BB_1} \cdot \frac{AA_1}{OA_1} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

or
$$OA + OB = OA_1 + OB_1$$
$$OA - OA_1 = OB_1 - OB$$
$$AA_1 = BB_1$$

donc on a
$$\frac{BC}{AC} = \frac{OA_1}{OB_1}.$$

Fig. 1.

Cette relation subsiste à la limite quand $A_1 B_1$ coïncide avec AB. Ainsi le point de contact C avec l'enveloppe est déterminé par la relation $\frac{BC}{AC} = \frac{OA}{OB}$.

II. — *Détermination du lieu.* — Si D est le point de concours des perpendiculaires menées en A et B aux axes, CD est la bissectrice de ADB d'après la relation obtenue. Le point D se meut sur la droite RS telle que OR = OS = l; je mène OF, OH, perpendiculaire et parallèle respectivement à RS; ce sont les bissectrices des axes OU, OY; je joins OD et je prolonge CD en H, j'ai ID = IF,

$$ID = IB ;$$

donc le cercle ABD passe par les points F, A, O, H.

AFBH est un carré : car d'abord FB = AH et ensuite comme OH = HC, CB = BD = OA, les deux triangles OAH, BCH sont égaux, et AH = BH. De ce que AFBH est un carré,

je conclus que AB est perpendiculaire sur FH, que par suite CH = CF.

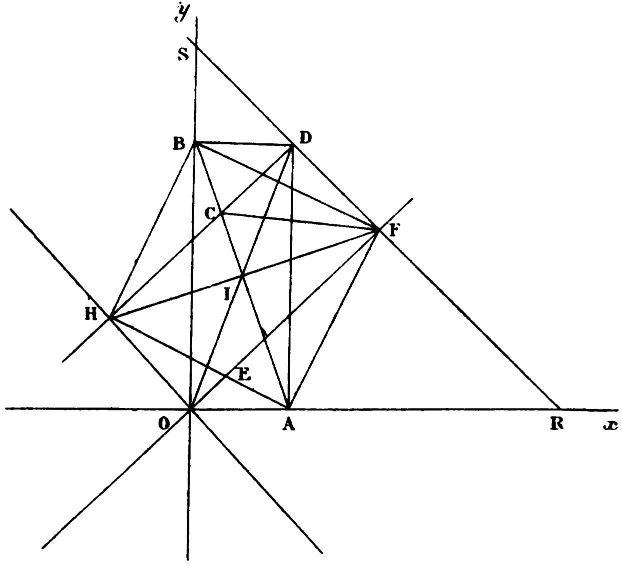


Fig. 2.

Le lieu cherché est donc une parabole ayant pour directrice la deuxième bissectrice et pour foyer le point de la première bissectrice qui est distant des axes de la longueur $\frac{l}{2}$.

QUESTION 6

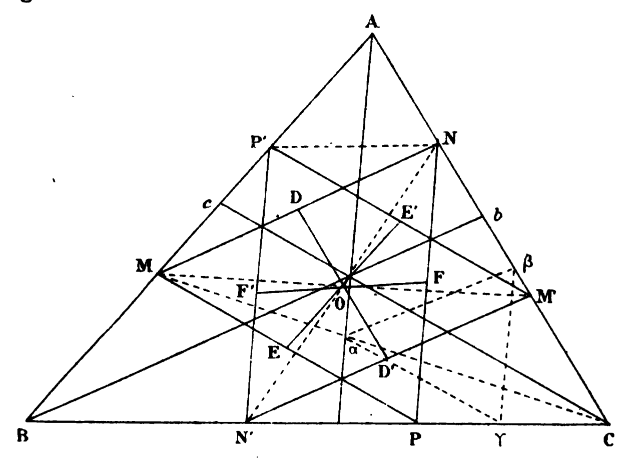
Solution par M. Paul Godefroy, à Lyon.

A tout triangle ABC *ont peut inscrire deux triangles ayant leurs côtés parallèles aux bissectrices de* ABC. *Ces triangles ont le même cercle des neuf points.*

Soient Aa, Bb, Cc. les bissectrices du triangle ABC. Pour obtenir l'un des triangles inscrits dont les côtés sont parallèles aux bissectrices, traçons dans l'angle c une parallèle $\beta\gamma$

à Aa, puis des points β et γ des parallèles $\beta\alpha$, $\gamma\alpha$ aux bissectrices Bb, Cc. On formera ainsi un triangle $\alpha\beta\gamma$ homothétique du triangle cherché, et le point C sera pour ces deux triangles un centre de similitude directe : la droite $C\alpha$ coupera AB en un point M qui sera l'un des sommets du triangle cherché, il ne restera plus qu'à mener de ce point des parallèles MN, MP à Bb, Cc et à joindre NP.

En répétant la même construction dans l'angle B et dans l'angle A, on obtient le second triangle dont les côtés sont parallèles aux bissectrices. Soit M'N'P' ce second triangle.



Les deux triangles MNP, M'N'P', ayant leurs côtés parallèles deux à deux, sont homologiques : il s'ensuit que les droites MM', NN', PP' qui joignent les sommets opposés aux côtés correspondants sont concourantes en un point O. De ce que ces droites sont concourantes on conclut que les triangles MNP', M'N'P sont aussi homologiques; les côtés respectivement opposés aux sommets P et P', M' et M, N' et N doivent donc se rencontrer deux à deux en trois points en ligne droite; or les côtés MN, M'N' sont parallèles, il en est donc de même des côtés P'N et PN', P'M et PM'; on verrait de même que MN' et NM' sont parallèles.

Les deux triangles MNP, M'N'P' auront le même cercle des

neuf points, si les milieux des trois côtés de chaque triangle sont six points sur une même circonférence. Soient D,E,F les milieux des côtés du premier triangle, D'E'F' les milieux des côtés du second. Joignons DD', EE', FF'. Les figures MNM'N', MPM'P', NPN'P' étant, comme on l'a vu, des parallélogrammes, les droites DD',EE',FF' qui joignent les milieux de côtés parallèles sont respectivement parallèles et égales à NM', MP', PN'; de plus elles passent toutes trois par O, point de concours commun des diagonales des trois parallélogrammes, et sont divisées en deux parties égales par ce point. Tout revient donc à prouver que DD' = EE' = FF'.

Le triangle PN'M' est isoscèle. On a en effet

angle M'N'P = angle bBN'

angle N'M'P = angle P'MN = angle P'Bb.

Mais Bb étant bissectrice de B, on a bBN' = P'Bb. Donc enfin le triangle PN'M' est isoscèle ; il s'ensuit que PN' = PM; mais PN' = FF' et PM' = EE' : donc EE' = FF'; on prouverait de même que DD' = EE = FF'.

Ces droites, étant égales et étant divisées en deux parties égales par le point O, sont des diamètres du cercle des neuf points commun aux deux triangles considérés. Ce cercle a pour centre le point O.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Prémorant, élève au collège de Cherbourg.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX
DE L'ÉCOLE NAVALE

a et b étant des angles moindres que 90°, on a

$$\frac{\cos a \cdot \cos b}{\cos^2 \frac{a+b}{2}} < 1.$$

— On a les relations

$$a' = \frac{r+a}{2}; \quad r' = \sqrt{ra'};$$

trouver la limite du rapport $\frac{r'-a'}{r-a}$ quand a tend vers r.

— On donne deux sphères dont la distance des centres est d; trouver sur la ligne des centres un point tel que la somme des deux zones vues de ce point soit minima.

— Trouver la limite de l'expression $y = a - \sqrt{a^2 - b^2}$, lorsque a et b tendent vers l'infini; sachant que, dans ces conditions, $\frac{b^2}{a}$ tend vers une limite m.

— On donne l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Trouver la limite de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

sachant que x', y' ; x'', y'' sont racines de l'équation donnée.

— De l'équation $(1 + e \cos \theta)(1 - e \cos u) = 1 - e^2$, déduire l'équation $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$.

— Démontrer géométriquement la formule

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

— On donne un cylindre circonscrit à une sphère. Par deux points A et A', pris sur l'axe du cylindre et symétriques par rapport au centre de la sphère, on circonscrit deux cônes à la sphère. Ces cônes coupent le cylindre suivant les cercles BC et B'C'. Trouver le minimum de la surface totale formée des surfaces latérales des deux cônes et de la surface cylindrique comprise entre les cônes.

— Quelles relations doivent exister entre a, a', b, b', pour que les équations

$$a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0,$$

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha},$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a'^2 \sin^2 \alpha' + b'^2 \cos^2 \alpha'}$$

soient satisfaites, quels que soient α et α'.

— On mène les tangentes aux extrémités du grand axe AB d'une ellipse et une tangente quelconque qui rencontre en C et D les tangentes AC et BD. Démontrer que la tangente DC est vue des foyers sous un angle droit et que $AC \times BD$ est constant.

— Si dans une parabole on mène par le foyer F une corde AFB quelconque et que l'on abaisse les perpendiculaires AA', BB' despoints d'intersection sur l'axe, on a, bS étant le sommet de la courbe, $SF^2 = SA' \times SB'$.

— On donne un trapèze non isoscèle ABCD et la diagonale BD. Par un point I quelconque sur la hauteur BH, on mène une parallèle EON à la base, rencontrant les côtés en E et N, et la diagonale en O. Trouver le point I pour lequel $EO^2 + ON^2$ est maximum.

— Trouver la valeur que prend, pour x infini, l'expression

$$y = \sqrt{4x^2 - 3x + 2} - \sqrt{4x^2 + 3}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

77. — Construire un triangle connaissant les deux côtés AB, AC et la longueur de la partie de la bissectrice de l'angle BAC comprise entre les deux hauteurs partant de B et de C.

(E. Lemoine.)

78. — Trouver les côtés d'un triangle connaissant une hauteur, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

79. — Mener dans un triangle une transversale tangente au cercle inscrit au triangle et détachant un triangle de surface donnée. *(Reidt.)*

80. — Étant données les équations

$$\cos x + \cos y = 2\rho \cos \alpha$$
$$\sin x + \sin y = 2\rho \sin \alpha,$$

trouver l'équation qui admet pour racines $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ et $\operatorname{tg} \frac{1}{2} y$.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 5254-3.

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir pages 3, 25 et 49.)

TROISIÈME APPLICATION

Étude de géométrie récurrente sur les centres de gravité.

22. — Le point de concours des médianes d'un triangle se prête particulièrement bien à une étude de géométrie récurrente, parce qu'il jouit d'une propriété particulière qui permet de faire cette étude par des considérations empruntées à la mécanique, et qui conduisent au point d'ordre n, d'une façon, pour ainsi dire, intuitive.

Considérons quatre points dans l'espace 1, 2, 3, 4, et l'un d'entre eux en particulier, le point 4. Si l'on joint ce point au point de concours des médianes du triangle 1,2,3, au point que nous désignerons par G_{123}, nous obtenons une droite Δ_4. Les quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, ainsi obtenues, concourent en un même point G_{1234}, et s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 3.

23. — *Généralement*: imaginons n points 1, 2,...n dans l'espace et considérons l'un d'eux en particulier, le point n. Si l'on joint ce point au point $G_{1,2,\ldots(n-1)}$, précédemment défini, on obtient une droite Δ_n. Les n droites ainsi obtenues concourent en un même point $G_{1,2\ldots n}$ et s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à n.

Cette propriété peut s'établir par des considérations purement géométriques et en prenant pour base et pour point de départ la définition géométrique du point G_{123}. Mais on sait, et nous n'avons pas à rappeler ici comment on démontre immédiatement cette propriété en imaginant n masses égales appliquées aux points 1, 2...n, et en cherchant le centre de gravité de ces n masses.

24. — Nous dirons maintenant quelques mots très rapides

sur les points que nous avons imaginés autrefois (*) et que nous avons nommés *centres de gravité dans les polygones complets*. Ces points remarquables ont été trouvés par un procédé très différent de celui que nous allons exposer et beaucoup moins simple.

Imaginons d'abord la figure formée par quatre droites indéfinies 1, 2, 3, 4, situées dans un plan : faisons abstraction de l'une d'elles, de la droite 4. par exemple, il reste un triangle 1, 2, 3 auquel correspond un point G_{123}. D'autre part, les côtés de ce triangle rencontrent la droite 4 en trois points 4,1 ; 4,2 ; 4,3 ; que l'on peut considérer comme formant les sommets d'un triangle aplati. A un pareil triangle correspond un point γ_4. Ce point γ_4 est le centre de gravité de trois masses égales appliquées aux points 4,1; 4,2 ; 4,3 : si l'on veut rester dans le domaine purement géométrique, on peut dire alors que γ_4 est le point limite du point de concours des médianes d'un triangle qui s'aplatit, les trois sommets ayant des positions limites bien déterminées

On obtient ainsi une droite Δ_4, en joignant le point G_{123} à γ_4: les quatre droites qu'on peut ainsi obtenir concourent au même point et s'y partagent mutuellement en deux parties égales.

On reconnaît immédiatement cette propriété en appliquant des masses égales aux six sommets du quadrilatère complet formé par les droites données. On peut imaginer que l'on cherche le centre de gravité de ces six masses en cherchant d'abord le point d'application de la résultante des masses

1,2 ; 1,3 ; 2,3 ;

point qui est précisément G_{123} ; puis le centre de gravité des masses 4,1 ; 4,2 ; 4,3 ;

ce second point est γ_4. Le point d'application de la résultante des six masses que nous avons imaginées est donc placé au milieu de $\gamma_4 G_{123}$. Ceci prouve, tout à la fois : 1° que les quatre droites analogues à $\gamma_4 G_{123}$ concourent au même point ; 2° qu'elles se partagent en ce point, que nous désignerons par G_{1234}, en deux parties égales.

(*) *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, t. III.

25. — Prenons maintenant le polygone complet défini par n droites, deux à deux concourantes. Ce polygone admet $\frac{n(n-1)}{2}$ sommets ; si nous plaçons des masses égales à chacun de ces points, le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure, appliqué à cette figure générale, conduit au théorème suivant qui, comme l'a remarqué M. Catalan (*), rappelle un beau théorème de Coriolis (**).

Soit 1,2...n, n *droites deux à deux concourantes, faisons abstraction de l'une d'elles, de la droite* n *par exemple; il reste un polygone complet défini par les droites* 1,2... (n — 1)*; et à ce polygone correspond un point* $G_{1,2\ldots(n-1)}$, *point défini par la loi même que nous énonçons en ce moment. Si l'on joint ce point au point* $\gamma_{1,2\ldots(n-1)}$, *centre de gravité des* (n — 1) *points communs à la droite* n *et aux droites* 1,2... (n — 1), *les* n *droites ainsi obtenues concourent en un même point et s'y partagent mutuellement dans le rapport de* 2 *à* (n — 2).

C'est le point de concours des n droites analogues à $G_{1,2,\ldots(n-1)}$, $\gamma_{1,2\ldots(n-1)}$ qui constitue le point $G_{12\ldots n}$.

26. — Nous abrégeons, le plus qu'il nous est possible, cette exposition de la géométrie récurrente ; mais nous ne pouvons pas quitter cette étude des centres de gravité sans montrer, par un nouvel exemple, comment on peut varier à l'infini la découverte de ces théorèmes successifs qui, prenant pour point de départ une propriété élémentaire, conduisent, de proche en proche, à un théorème général, qui est leur conclusion naturelle.

Imaginons encore quatre droites deux à deux concourantes et à chacun des sommets plaçons maintenant *deux* masses égales. Nous obtenons ainsi douze forces F égales et parallèles que l'on peut composer, comme nous allons l'expliquer.

Considérons les trois points

4,1 ; 4,2 ; 4,3 ;

(*) *Nouvelle correspondance mathématique* t. III, p. 346.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, 24e cahier, p. 135.

et prenons, à chacun de ces points, une des forces F. Ces trois forces ont une résultante 3F, appliquée au point G_{123}. Chaque sommet du quadrilatère complet que nous considérons appartenant à deux des triangles formés par ce quadrilatère, on obtient, en combinant les forces F, comme nous venons de le dire, quatre forces 3F, ayant pour points d'application G_{123}, G_{234}, G_{341}, G_{412}.

On peût maintenant combiner les trois forces 3F appliquées aux points G_{234}, G_{341}, G_{412};
et l'on obtient une force 9F, appliquée au centre de gravité γ'_4 du triangle G_{234}, G_{341}, G_{412}. La droite γ'_4 G_{123} et les droites analogues passent par le point que nous avons défini tout à l'heure (§ 24) s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 3.

De cette remarque on peut conclure le théorème suivant:

Théorème. — *Étant données quatre droites* 1,2,3,4, *deux à deux concourantes; si l'on fait abstraction de l'une d'elles, de la droite* 4 *par exemple, on obtient un triangle auquel correspond un centre de gravité* G_{123} ; *si l'on joint ce point au centre de gravité du triangle formé par les trois autres points* G : *1° les quatre droites* Δ *ainsi obtenues concourent au même point* G_{1234}; *2° ce point est le centre de gravité du quadrilatère complet, c'est-à-dire le centre de gravité des six sommets de cette figure ; 3° les droites* Δ *se partagent mutuellement dans le rapport de* 1 *à* 3.

27. — Prenons maintenant un pentagone complet et à chacun des sommets appliquons *six* masses égales, produisant chacune une force égale à F. Faisons abstraction de l'une des droites, de la droite 5 par exemple, et considérons le quadrilatère complet 1, 2, 3, 4. Aux sommets de ce quadrilatère sont appliquées six forces; prenons deux d'entre elles et raisonnons comme nous l'avons fait au paragraphe précédent. Nous obtenons une force 12F appliquée au point G_{1234}. Chaque sommet du pentagone proposé appartient à *trois* quadrilatères complets. Par exemple le point 1, 2, est un sommet dans chacun des polygones

1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 5; 1, 2, 4, 5.

Comme il y a six forces F à chaque point, sommet du pentagone proposé, au point 1, 2 en particulier, on pourra diviser ces forces en trois couples égaux à 2F et nous obtiendrons finalement, par cette composition des forces F, 5 forces égales à 12F et appliquées aux centres de gravité des quadrilatères complets 1,2,3,4; 1,2,3,5, etc., points définis comme on l'a vu plus haut.

Si nous combinons maintenant les 4 forces 5F qui sont appliquées aux points G_{1235} etc., nous obtenons une force 4, 12 F appliquée en un point γ'_5, centre de gravité des quatre points G_{1235}, etc. Les cinq droites $G_{1234}\,\gamma'_5$ vont passer par le point d'application de la résultante des 60 forces F considérées, et, pour des raisons connues, se partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 4.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Imaginons cinq droites* 1,2,3,4,5, *qui définissent cinq quadrilatères complets, à chacun desquels correspond un centre de gravité, point défini précédemment. Si l'on joint l'un de ces points au centre de gravité des quatre autres points analogues, les cinq droites ainsi obtenues concourent au même point, centre de gravité du pentagone proposé, et se partagent mutuellement, en ce point, dans le rapport de* 1 *à* 4.

28. — On voit facilement, par les explications qui précèdent, quel est le théorème général auquel aboutissent les deux théorèmes précédents et comment on peut faire sa démonstration.

On imagine n droites, deux à deux concourantes, et à chacun des sommets S de ce polygone complet on place $1 . 2 . 3 \dots (n-2)$ masses égales. Chaque sommet S appartient à $(n-2)$ polygones complets d'ordre $(n-1)$, et l'on peut partager les $1 . 2 \dots (n-2)$ forces appliquées en S en $(n-2)$ groupes de $1 . 2 \dots (n-3)$ forces F. En combinant ces $1 . 2 \dots (n-3)$ forces appliquées aux sommets du polygone $1, 2, \dots (n-1)$, on obtient un point $G_{1 . 2 \dots n-1}$ précédemment défini. Si l'on joint ce point au centre de gravité γ'_n des $(n-1)$ autres points analogues,

on sait que les n droites ainsi obtenues concourent et se partagent mutuellement dans le rapport de 1 à $(n - 1)$. Le théorème général qui résulte de ces considérations peut donc s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Considérons* n *droites, deux à deux concourantes ; elles définissent* n *polygones complets d'ordre* (n — 1) *obtenus en faisant successivement abstraction de l'une d'elles, et, à chacun de ces polygones correspond un centre de gravité, point défini précédemment. Si l'on joint l'un de ces points au centre de gravité des* (n — 1) *autres points analogues, les* n *droites ainsi obtenues concourent au même point, centre de gravité du polygone complet proposé, et s'y partagent mutuellement dans le rapport de* 1 *à* n. *(A suivre.)*

SUR UN POINT DE LA DISCUSSION

DU SECOND DEGRÉ

Par M. **P. Barrieu**, professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

La plupart des traités d'algèbre élémentaire donnent la démonstration des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si deux nombres* α *et* β, *substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs de signes contraires,* α *et* β *comprennent entre eux une racine et n'en comprennent qu'une.*

Théorème II. — *Si les deux nombres* α *et* β, *substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs de même signe,* α *et* β *comprennent entre eux les deux racines, ou n'en comprennent aucune.*

Nous nous proposons, dans le cas particulier où α et β sont des nombres égaux et de signes contraires, de compléter l'énoncé de ces deux théorèmes et d'en modifier la forme de manière à pouvoir les introduire utilement dans les discussions du second degré. Nous ferons remarquer que

le cas particulier dont il s'agit est assez fréquent ; il se présente notamment dans un certain nombre de problèmes sur le cercle et la sphère, et dans les équations du second degré qui ont pour inconnue un sinus ou un cosinus.

Voici les deux théorèmes que nous proposons, et qui modifient légèrement ceux que nous avons rappelés :

Théorème I. — *Si deux nombres égaux et de signes contraires,* $-\alpha$ *et* $+\alpha$*, substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs dont le produit soit négatif,* $-\alpha$ *et* $+\alpha$ *comprennent entre eux une racine et n'en comprennent qu'une;* la racine comprise est celle qui a la plus petite valeur absolue.

Théorème II. — *Si deux nombres égaux et de signes contraires,* $-\alpha$ *et* $+\alpha$*, substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs dont le produit soit positif,* et si, de plus, le produit des carrés des racines est moindre que α^4, *les deux racines, si elles sont réelles sont comprises entre* $-\alpha$ *et* $+\alpha$.

Démonstration. — Soit P le produit des facteurs obtenus en remplaçant successivement x par $-\alpha$ et $+\alpha$ dans le premier membre de l'équation du second degré :

$$P = (a\alpha^2 - b\alpha + c)(a\alpha^2 + b\alpha + c),$$

nous aurons deux cas à distinguer :

1° $P < o$. Les deux facteurs de P sont de signes contraires, donc $-\alpha$ et $+\alpha$ comprennent entre eux une racine.

La racine comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$ est en valeur absolue moindre que α, la racine extérieure est au contraire en valeur absolue plus grande que α ; donc la racine comprise est celle qui a la plus petite valeur absolue, et le théorème I est démontré.

2° $P > o$. Les deux facteurs de P sont de même signe ; donc $-\alpha$ et $+\alpha$ comprennent entre eux les deux racines ou n'en comprennent aucune.

Si les deux racines sont comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$, chacune d'elles est en valeur absolue moindre que α, et le produit de leurs carrés est moindre que α^4.



Si, au contraire, les deux racines sont extérieures α et $+\alpha$, chacune d'elles est en valeur absolue plus grande que α, et le produit de leurs carrés est plus grand que α^4.

Donc, pour que les deux racines soient comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$, il faut et il suffit que l'on ait en même temps :

$$\begin{cases} P > 0 \\ x'^2 x''^2 < \alpha^4 \end{cases}$$

La deuxième condition peut s'écrire

$$\frac{c^2}{a^2} < \alpha^4$$

ou $$(c - a\alpha^2)(c + a\alpha^2) < 0.$$

Pour le cas particulier où $\alpha = 1$ cette condition devient

$$(c - a)(c + a) < 0.$$

Nous allons maintenant appliquer ces théorèmes à la discussion des problèmes du second degré.

Problème I. — *Discuter l'équation du second degré en* sin x.

$$(m - 1)\, sin^2\, x - 2\,(m + 1)\, sin\, x + 2m - 1 = 0.$$

(Rebière, *Trigonométrie*, p. 75.)

Pour simplifier l'écriture, nous poserons $\sin x = y$. L'équation devient alors

$$(m - 1)\, y^2 - 2\,(m + 1)\, y + 2m - 1 = 0; \qquad (1)$$

Discussion. — Les racines doivent être réelles et comprises entre -1 et $+1$.

La condition de réalité est

$$(m + 1)^2 - (m - 1)(2m - 1) \geq 0$$

d'où
$$- m^2 + 5m \geq$$
$$m\,(m - 5) \leq 0$$
$$0 < m < 5. \qquad (2)$$

Soit P le produit des facteurs obtenus en remplaçant successivement y par -1 et $+1$ dans le premier membre de l'équation (1), nous avons

$$P = \{m - 1 + 2(m + 1) + 2m - 1\}\{m - 1 - 2(m + 1) + 2m - 1\}$$
$$= 5m\,(m - 4).$$

Donc P est négatif pour toutes les valeurs de m comprises entre 0 et 4, positif pour toutes les autres.

La condition $y'^2 y''^2 < 1$ devient



$$(c - a)(c + a) < 0 \qquad \text{(Th. II.)}$$

ou, en remplaçant a et c par leurs valeurs,

$$m(3m - 2) < 0,$$

d'où

$$0 < m < \frac{2}{3}, \qquad (3)$$

Le produit des racines est de même signe que

$$(m - 1)(2m - 1) = 2(m - 1)\left(m - \frac{1}{2}\right).$$

Les racines seront donc de signes contraires pour toutes les valeurs de m comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, de même signe pour toutes les autres.

La somme des racines est de même signe que

$$(m + 1)(m - 1).$$

Elle est donc négative pour toutes les valeurs de m comprises entre -1 et $+1$, positive pour toutes les autres.

Nous pouvons résumer tous ces résultats dans les deux tableaux suivants :

$$\text{var. de } m \left\{ \underbrace{\overbrace{0 \ldots \frac{1}{2} \ldots \frac{2}{3}}^{} }_{y'^2y''^2 < 1} \underbrace{\ldots 1 \ldots 4 \ldots 5}_{y'^2y''^2 > 1} \right. \qquad \overbrace{0 \ldots 4}^{P < 0}\ \overbrace{4 \ldots 5}^{P > 0}$$

$$\text{var. de } m \left\{ \overbrace{0 \ldots \frac{1}{2}}^{y'y'' > 0} \overbrace{\ldots \frac{2}{3} \ldots 1}^{y'y'' < 0} \overbrace{\ldots 4 \ldots 5}^{y'y'' > 0}. \right. \qquad \underbrace{0 \ldots \frac{1}{2} \ldots \frac{2}{3} \ldots 1}_{y' + y'' < 0} \underbrace{\ldots 4 \ldots 5}_{y' + y'' > 0}$$

Il est inutile de considérer les valeurs de m autres que celles comprises entre 0 et 5, puisque les racines correspondantes seraient imaginaires.

Cela posé, nous avons deux cas à considérer :

Premier cas. $0 < m < 4$.

On a $P < 0$. Une seule racine est comprise entre -1 et $+1$. (Th. I.) Il y a donc une seule solution. Pour distinguer la racine qui convient, il suffit de rechercher au deuxième tableau celle qui a la plus petite valeur absolue. (Th. I.)

1°. $0 < m < \frac{1}{2}$. Les deux racines sont négatives. Il faudra donc prendre celle qui a la plus petite valeur absolue, c'est-à-dire la plus grande racine en valeur relative. Donc : *une solution négative.*

2°. $\frac{1}{2} < m < 1$. Les deux racines sont de signes contraires et la racine positive est la plus petite en valeur absolue. Donc : *une solution positive.*

3°. $1 < m < 4$. Les deux racines sont positives; on prendra la plus petite. Donc : *une solution positive.*

Deuxième cas. $4 < m < 5$.

On a : $P > 0$ et $y'^2y''^2 > 1$. Il n'y a donc aucune racine comprise entre -1 et $+1$. (Th. II.) Donc : *pas de solution.*

(A suivre.)

EXAMENS ORAUX POUR SAINT-CYR

Algèbre.

Étudier les variations du trinôme $3x^2 + 2x - 1$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— On donne l'équation $x^2 + px + q = 0$, former l'équation admettant les racines $x' + \frac{1}{x'}$ et $x'' + \frac{1}{x''}$.

— $x^m - a^m$ est-il toujours divisible par $x^2 - a^2$.

— Résoudre $x^8 - 1 = 0$. Combien cette équation a-t-elle de solutions ?

— Étudier la fonction $y = x^4 - 5x^2 + 7$.

— Étudier la fonction $y = \frac{1}{x^2 - 2h}$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Courbe représentative.

— Étudier la fonction $y = x^2 - 2x + 7$; courbe.

— Discuter les racines de l'équation

$$mx^2 - (2m + 1)x + 3m - 1 = 0,$$

quand m prend toutes les valeurs possibles. Condition de réalité des racines. Que faut-il pour que les racines soient positives ?

— Variations de la fonction $y = 3x^2 - 5x + 4$ quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Que faut-il pour que les racines de $ax^2 + bx + c - 2a = 0$ étant réelles soient toutes deux plus grandes que 2.

— Résoudre $\dfrac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} > 0$.

— Résoudre $x^2 - 12x + 35 > 0$.

— Maximum et minimum de $\dfrac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 5x + 6}$.

— Résoudre $3x + 2\sqrt{x} = a$.

— Résoudre $x + y = a$;

$$x^3 + y^3 = b^3.$$

— Étudier les variations de la fonction $y = x^4 - 8x^2$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Résoudre $\dfrac{ax}{x - a} + x = b$.

Discuter. Que faut-il pour que les deux racines soient supérieures à $10\,a$?

— Variation du trinôme $8x^2 - 5x + 2$.

— Résoudre $\dfrac{a^2}{x^2 - b^2} - \dfrac{b^2}{x^2 - a^2} = A$.

— Résoudre $xy = \mu$;

$$(x + a)^2 + (y + a)^2 = m^2.$$

Trigonométrie.

— Résoudre $\cos x = m \operatorname{tg} x$. Discuter.

— Résoudre $\sin 2x = \operatorname{tg} x$.

— Résoudre $3 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{cotg} x = 4$.

— Résoudre $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c$. Condition de réalité. Rendre calculable par log. la valeur de $\operatorname{tg} x$.

— Résoudre $\sin 2x - \cos^2 x = m$. Discuter.

— Trouver la valeur de $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$ quand x tend vers 45.

— Résoudre $\cot g\, x + \sec 2x = m$. Discuter.

— Résoudre $\dfrac{\operatorname{tg}(45 + x)}{\operatorname{tg} x} = k$.

— Résoudre $\sin x + \sin (60 - x) = n$.

— Résoudre $\dfrac{\sin x}{\sin (\alpha - x)} = m$.

— Résoudre $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = m^2$.

— Résoudre

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 2 (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x).$$

— Résoudre $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$.

— Résoudre $\cos 2x = \sin 3x$.

— Résoudre $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 1$.

— Résoudre et discuter

$$(m - 1) \operatorname{tg}^2 x - 2 (m - 2) \operatorname{tg} x + 3 (m - 3) = 0.$$

— Voir ce que devient la fraction $\dfrac{\sin (x - 30)}{1 - 2 \sin x}$ quand x tend vers $30°$.

— Résoudre et discuter

$$\operatorname{tg}^2 x - (m - 1) \operatorname{tg} x + (m - 2) = 0,$$

x devant varier entre 0 et $90°$.

— Résoudre et discuter

$$m \operatorname{tg}^4 x - 2 (m - 1) \operatorname{tg}^2 x + m - 2 = 0.$$

— Résoudre et discuter

$$3 \sin^2 x + b = \sin x \cos \alpha.$$

— Résoudre $2 \sin x + \cos 2x = m$.

— Résoudre

$$m \sin^2 x - (m - 2) \sin x + 3 = 0.$$

Applications diverses.

On donne un cercle. On mène la corde AC et la corde symétrique AD; on joint CD; mener AC tel que $AC^2 + AD^2 + CD^2 = 4m^2$.

— On donne un demi-cercle AB. Mener une corde PQ perpendiculaire à AB telle qu'on ait $AP + PQ = m$; discuter.

— On donne une circonférence O et un point A sur le diamètre BC prolongé. Mener une sécante APQ telle que l'angle QOP soit quadruple de l'angle PAO.

— Calculer les diagonales d'un quadrilatère inscriptible en fonction des côtés. Expression de la surface.

— Étant donné un demi-cercle AB, trouver sur AB un point C tel que si de ce point on mène une perpendiculaire jusqu'à la rencontre d'une droite indéfinie menée par le point A et faisant avec AB un angle α, on ait $CF^2 + CD^2 = m^2$. Cas où $\alpha > 45°$; $\alpha < 45°$. Conditions de possibilité du problème.

— On donne un cercle et un diamètre AB. Mener une corde CD perpendiculaire à AB et telle qu'on ait $AC^2 + CD^2 = m^2$.

— Couper une sphère par un plan tel que le cône qui a pour base la section et pour sommet le centre de la sphère ait une surface égale à celle de la calotte qui a pour base la section.

— On donne une sphère. On la coupe par un plan de manière à en détacher un segment à une base. Mener ce plan de façon que $\dfrac{\text{vol. segment BAM}}{\text{v. secteur BOM}} = K.$

— On donne un demi-cercle AB et une corde AC. Déterminer sur le demi-cercle un point M tel que si de ce point on abaisse MP perpendiculaire sur AB et du pied P de cette perpendiculaire une perpendiculaire PQ sur AC, on ait

$$MP^2 + PQ^2 = m^2.$$

— Somme des carrés des diagonales dans un trapèze.

— On donne un demi-cercle AB et on même une tangente en B. Placer une corde PQ telle que le rapport des volumes engendrés par le demi-cercle et le triangle PBQ soit égal à m.

Mécanique.

Un nageur voudrait aller de A en C pour traverser une rivière dont les bords sont supposés rectilignes et parallèles et qui coule dans un sens déterminé. Dans quelle direction doit-il nager? On connaît la vitesse v de la rivière, celle du nageur h, et on suppose que les deux mouvements sont uniformes. — Discussion.

— La barre AB du poids de 200 kil., de longueur $1^m,20$, supporte en A et en B des poids de 60 et 80 kil. Où doit être placé le point O d'appui pour qu'il y ait équilibre?

— Un pendule pesant 25 gr. est écarté de la position ver-

ticale d'un angle de 60°. Trouver la valeur de la force horizontale (une source d'électricité) qui maintient le pendule en B'.

— Quelles sont les valeurs de deux forces f et f' à appliquer en A et B extrémités d'une barre AB pour qu'elles soient composantes d'une force verticale de 60 k. appliquée en C tel que AC = 15 c. m. et BC = 25 c. m.

— Si d'un point M de la résultante R de deux forces concourantes P et Q on abaisse deux perpendiculaires MN, MI, démontrer qu'on a la relation $\frac{MI}{MN} = \frac{P}{Q}$.

— Aux points A et B d'une droite rigide AB sont appliquées deux forces F et P faisant avec AB des angles de 120° et 150° et telles que P = 2F. Démontrer qu'il y a une résultante ; en trouver la valeur et le point d'application sur AB.

— Une poutre AB pesant 400 k. repose en AB sur deux points fixes et supporte au tiers de sa longueur un poids de 500 k. Trouver la pression sur les points d'appui.

— On suppose matérielles et pesantes les lignes de la figure dite pont-aux-ânes et si la figure peut tourner autour de l'axe perpendiculaire à son plan par le point M, milieu de BC, il y a équilibre.

— Dans un triangle on donne un point quelconque O intérieur; on le joint aux trois sommets; on suppose que trois forces sont dirigées suivant OA, OB, OC; on demande leur résultante. Prouver qu'elle passe par le centre de gravité G du triangle. Valeur de la résultante par rapport à OG.

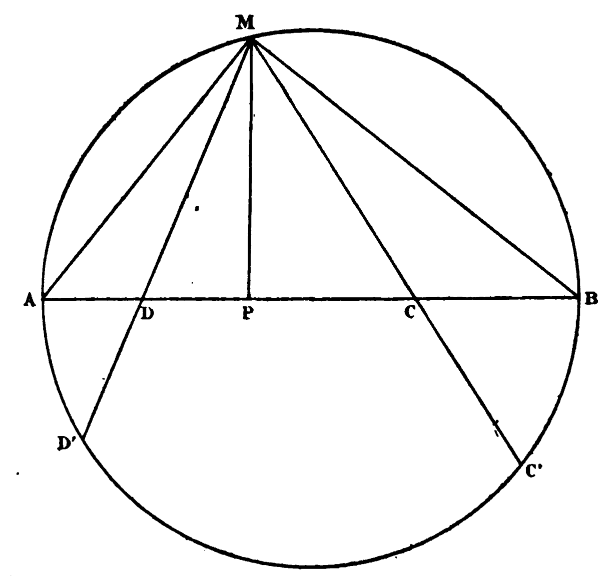
— Une barre AB de $1^m,50$ de long pèse 80 k. Quelle force faut-il appliquer en B pour que AB reste horizontale, la barre pouvant tourner librement autour du point C tel que AC = 0,80 ?

QUESTION 44

Solution par M. Georges BERTHELOT, ex-élève du Lycée de Châteauroux, Répétiteur au Lycée de Bourges.

On considère un cercle et un diamètre AB; *d'un point* M *pris sur la circonférence, on abaisse une perpendiculaire* MP *sur* AB. *Soit* C *le milieu de* PB. *Prenons enfin entre* A *et* B *un point* D *tel que* $AD = \frac{PB}{4}$. *Les droites* MC *et* MD *rencontrent le cercle en des points* C' *et* D'. *Démontrer que l'on a*

$$arc\ MB = 2BC' + AD'.$$



Je vais d'abord démontrer que MD = DC.

En effet, dans le triangle DMC, on a

$$\overline{MD}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{DC}^2 - 2DC \times PC.$$

Or dans le triangle MPC on a

$$\overline{MC}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PC}^2.$$

Et dans le triangle rectangle AMB on a

$$\overline{MP}^2 = AP \times PB = \left(\frac{PC}{2} + DP\right) 2PC = \overline{PC}^2 + 2PC \times DP.$$

Donc $\overline{MD}^2 = 2\overline{PC}^2 + \overline{DC}^2 + 2PC \times DP - 2DC \times PC.$

Et comme $DC = DP + PC$, on a

$$\overline{MD}^2 = \overline{DC}^2;$$

d'où $MD = DC$

et par suite angle DCM = angle DMC.

De plus on a

$$AM + MB = BC' + D'C' + AD'$$

$$MB = BC' + D'C' + AD' - AM$$

Or, $D'C' = AM + BC'$

donc $MB = BC' + AM + BC' + AD' - AM$

$$MB = 2BC' + AD'.$$

Nota. — **La même question à été résolue par MM. Puig, à Montpellier; Deville, à Lorient.**

QUESTION 46

Solution par M. E. Mosnat, à Thiers.

On donne l'axe Ox, *le sommet* O, *et un point* M *d'une parabole; on propose de construire cette courbe point par point au moyen d'une équerre.* (G.L.)

Joignons OM; menons par le point O e perpendiculaire à OM et par le point M une parallèle à Ox; ces deux droites se coupent en un point I; de ce point, abaissons une perpendiculaire sur Ox; soit A le pied de cette perpendiculaire et B le pied de l'ordonnée du point M.

Les deux triangles rectangles OMB, IAO sont semblables

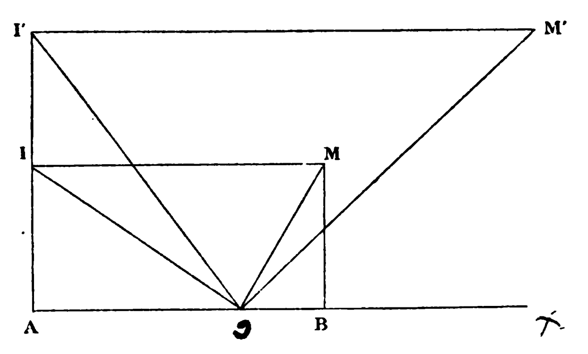
et donnent $$\frac{MB}{OB} = \frac{AO}{IA}$$

ou comme $IA = MB$; $MB^2 = OB \cdot AO$;

mais quelle que soit la position du point M sur la parabole,

on a $$\frac{MB^2}{OB} = \text{const}.$$

Donc $AO = \text{const.}$
ce qui prouve que le lieu du point I, quand on fait varier la position du point M sur la parabole, est une perpendiculaire



à l'axe Ox de la parabole menée, à une distance du sommet égale au rapport $\frac{MB^2}{OB}$, c'est-à-dire au double du paramètre.

Il est alors facile de construire la parabole; puisqu'on connaît un point M, on peut déterminer la perpendiculaire IA.

On mènera alors, par le point O, une droite qui coupera la perpendiculaire IA en I', et une perpendiculaire OM' à cette droite. Par le point I' on mènera une parallèle à Ox qui coupera la perpendiculaire OM' en M', le point M' appartient à la parabole.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Vail, à Arcueil; La Chesnais, au lycée Saint-Louis, à Paris; Besson, à Nantes; Deville, à Lorient; H. Bourget, à Aix.

QUESTION 50

Solution par M. Deville, brigadier d'artillerie de Marine, à Lorient.

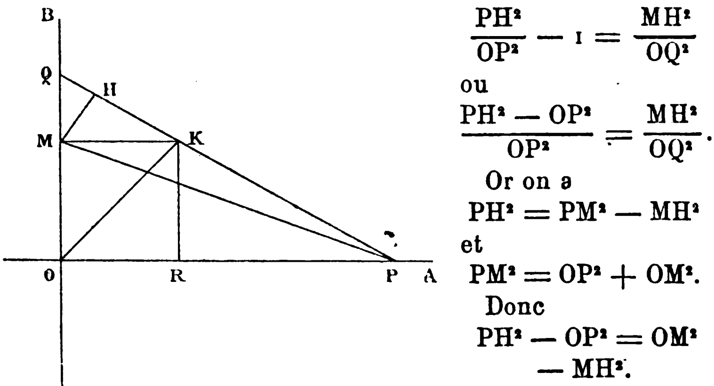
On considère un angle droit AOB, *et sur* OB *un point fixe* M. *On trace une droite rencontrant* OB *au point* Q, OA *au point* P *et telle que si du point* M *on abaisse une perpendiculaire* MH *sur*

PQ, *on ait toujours la relation*

$$\frac{PH^2}{OP^2} - \frac{MH^2}{OQ^2} = 1.$$

Démontrer que la droite PQ *passe par un point fixe.*

La relation considérée peut s'écrire



$$\frac{PH^2}{OP^2} - 1 = \frac{MH^2}{OQ^2}$$

ou

$$\frac{PH^2 - OP^2}{OP^2} = \frac{MH^2}{OQ^2}.$$

Or on a

$$PH^2 = PM^2 - MH^2$$

et

$$PM^2 = OP^2 + OM^2.$$

Donc

$$PH^2 - OP^2 = OM^2 - MH^2.$$

Par suite, la relation peut s'écrire

$$\frac{OM^2 - MH^2}{OP^2} = \frac{MH^2}{OQ^2} = \frac{OM^2}{OP^2 + OQ^2} = \frac{OM^2}{PQ^2}.$$

On tire de là

$$OM = \frac{MH.PQ}{OQ}.$$

Menons MK, parallèle à OP, et rencontrant PQ en K; nous aurons, par la similitude des triangles MHK, OPQ :

$$MK = \frac{MH.PQ}{OQ}.$$

Donc $MK = OM.$

Par suite, le point K est le sommet du carré construit sur les axes OA et OB, avec OM comme côté. Donc la droite PQ passe par un point fixe K.

NOTA. — La même question a été résoluè par M. Mosnat, à Thiers.

QUESTION 53

On considère l'expression

$$U = \sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}},$$

et on propose de la transformer en un produit de deux facteurs de la forme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. *Démontrer que la transformation n'est possible que si* $a^2d = bc$, *et qu'elle n'est avantageuse que si* $a^2 - b$ *et* $a^2 - c$ *sont des carrés parfaits.*

L'égalité

$$\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})\ (\sqrt{u} + \sqrt{v})$$

donne, en élevant au carré

$$a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = (x + y + 2\sqrt{xy})\ (u + v + 2\sqrt{uv}).$$

On satisfait à cette égalité en posant

$$a = (x + y)\ (u + v)$$
$$b = 4\ (x + y)^2 uv$$
$$c = 4\ (u + v)^2 xy$$
$$d = 16\ xyuv.$$

Ces équations sont incompatibles, si l'on n'a pas $a^2d = bc$. Lorsque cette condition est remplie, le système est indéterminé ; en effet, on a, quel que soit γ, l'identité

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})\ (\sqrt{u} + \sqrt{v}) = (\sqrt{\lambda x} + \sqrt{\lambda y}) \times \left(\sqrt{\frac{u}{\lambda}} + \sqrt{\frac{v}{\lambda}}\right).$$

On peut profiter de cette indétermination pour prendre entre deux des quantités une relation quelconque. Posons par exemple $x + y = 1$,

On déterminera alors facilement u et v, puis x et y. On tire, en effet, des deux premières équations

$$u = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b};$$

$$v = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}.$$

En portant ces valeurs dans la troisième, on a xy, et

d'après la relation qui donne $x + y$, on trouve

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - c};$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - c},$$

On voit que si $a^2 - b$ et $a^2 - c$ sont des carrés parfaits, x et y sont rationnels, et que, par conséquent, la formule est avantageuse, puisque l'on a un produit de facteurs qui sont des sommes de radicaux simples.

Soit par exemple

$$U = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{6}}$$

On a ici :

$$a = 1; \quad b = \frac{3}{4}; \quad c = \frac{8}{9}; \quad d = \frac{6}{9};$$

la condition $a^2d = bc$ est remplie et l'on a

$$a^2 - b = \frac{1}{4}$$

$$a^2 - c = \frac{1}{9}.$$

Donc

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}; \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

puis

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$v = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$U = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + 3)}{6}.$$

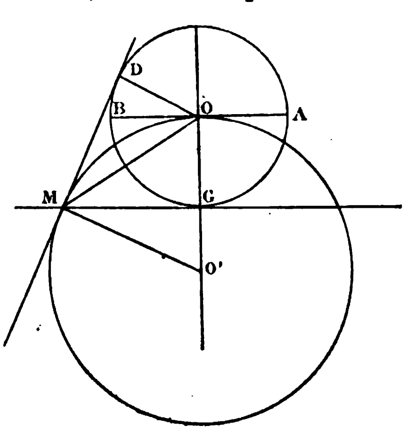
QUESTION 56

Solution par M. Sagols, élève au Lycée de Toulouse.

On considère un cercle C *de centre* O; *soit* AB *un diamètre fixe de ce cercle ; par le point* O, *on mène une circonférence* C' *tangente à* AB; *puis on mène une tangente commune aux cercles*

C et C′ ; on propose de trouver le lieu des points de contact de cette dernière droite avec C′.

Soit MD la tangente commune, D étant le point de contact avec C, et M le point de contact avec la circonférence C′ de centre O′. Menons MO′, DO et joignons M au point G où OO′ rencontre C. Les angles O′MO et O′OM sont égaux, de même O′MO et MOD′ puisque OD, O′M sont parallèles, donc O′OM = MOD. Les triangles MOG, MOD sont donc égaux, et l'angle MGO étant droit, le point M est sur la tangente au point G au cercle C.



Réciproquement tout point M de la droite appartient au lieu; en effet, menons par M la tangente à C autre que GM, joignons O à D et menons en M la parallèle à DO qui coupe OG en O′. Menons MO qui est la bissectrice de DOG. Les angles OMO′ et DOM sont égaux, donc OMO′ = MOO′; par suite O′O = O′M et le cercle de centre O et de rayon OO′ est tangent à AB en O, et à MD au point M.

Le lieu du point M se compose donc des deux tangentes à C parallèles à AB.

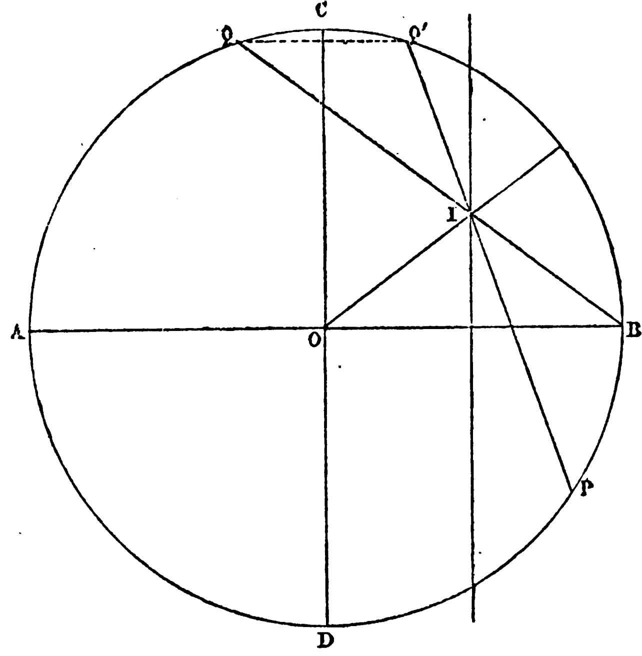
QUESTION 62

Solution par M. Mascart, élève au Lycée Henri IV.

On donne un cercle O *et deux diamètres rectangulaires* AB, CD. *A partir de* A, *on prend un arc* AQ *et dans l'autre sens un arc* AP *tel que* arc AP = 2 . arc AQ.

Soit Q′ *le symétrique de* Q *par rapport à* CD. *On demande*

le lieu géométrique décrit par le point I, *commun aux droites* PQ′ *et* BQ. (G. L.)



Les arcs QQ′ et BP, égaux à 180° — 2AQ, sont égaux, d'où il résulte arc QQ′B = arc Q′BP
et QB = Q′P. Donc OI est bissectrice de l'angle de ces cordes et passe par le milieu de l'arc Q′B. Alors IOB = IBO comme ayant même mesure $\frac{AQ}{2}$. Le point I est sur la perpendiculaire au milieu de OB.

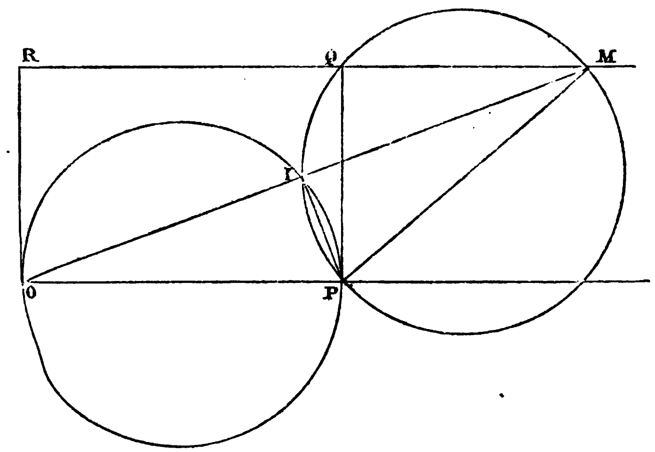
Le point Q décrivant la circonférence O, la droite BQ passera par tous les points de la perpendiculaire considérée : donc celle-ci est le lieu cherché.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Corne, à Nice; Tresselle, à Angers; Guignard, à Angoulême; H. S., à Toulouse; Savonnet, à Salins; Zuloaga, à Paris; Desplanques, à Condé; Bablon, à Épinal.

QUESTION 67

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Charleville.

On considère un rectangle dont les sommets sont les points O,P,Q,R. *Par les points* PQ *on fait passer une infinité de cercles; soit* Δ *l'un d'entre eux. Ce cercle* Δ *coupe* QR *en un point* M *et la droite* OM *coupe à son tour le cercle* Δ *en un point* I; *démontrer que le lieu du point* I *est une circonférence.*



Tirons IP et PM, qui passe évidemment par le centre du cercle Δ. L'angle PIM étant droit, il en sera de même de l'angle OIP. Le lieu du point I est donc la circonférence décrite sur OP comme diamètre.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Vialard, à Cluny; Chapron à Vincennes; Bougarel, à Toulon; Taratte, à Evreux; Bordier, à Blanzac; de, Kerdrel, à Keruzoret.

QUESTIONS PROPOSÉES

81. — Dans un triangle on connaît la base et l'angle au sommet. Trouver le lieu du centre du cercle des neuf points.

82. — Dans un triangle on connaît la bissectrice de l'angle au sommet, le rectangle des deux côtés qui comprennent cet angle et la différence des angles à la base ; on demande de construire ce triangle.

83. — Trois nombres entiers sont en proportion géométrique ; si le second augmente de 8, la progression devient arithmétique ; mais si, alors, le dernier terme augmente de 64, elle redevient géométrique. Trouver les trois nombres.

84. — Démontrer géométriquement que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,\frac{p}{q} + \text{arc tg}\,\frac{q-p}{p+q}.$$

85 — Par un point pris sur la bissectrice d'un angle mener une droite qui forme avec les côtés de l'angle un triangle de surface donnée.

86. — On considère deux droites rectangulaires Δ et Δ', et sur Δ on prend un point fixe P. Par ce point P on fait passer une transversale mobile δ, qui forme avec Δ et Δ' un triangle rectangle. Imaginons maintenant le cercle inscrit, et soit A le point de contact de ce cercle avec Δ', et B son point de contact avec δ. Démontrer que la droite AB passe par un point fixe. *(G. L.)*

87. — On considère une parabole P, et une droite Δ perpendiculaire à l'axe de cette parabole et située à une distance du sommet S égale au double du paramètre ; une parallèle à l'axe rencontre P au point A et Δ au point B. Trouver le lieu du centre des cercles circonscrits au triangle SAB quand cette parallèle se déplace. On suppose, pour bien fixer la position de la droite Δ, que cette droite rencontre réellement la parabole. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7254-3.

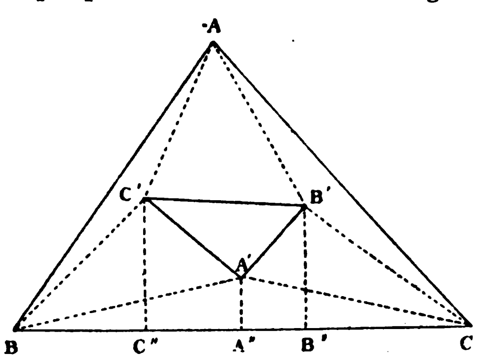
ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. A. Morel.

(*Suite*, voir pages 10, 33 et 62.)

14. — *Les triangles semblables* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *ont le même centre de gravité.*

Cette propriété n'est pas particulière à ces deux triangles; il est facile de voir que, si l'on construit intérieurement sur les côtés du triangle ABC comme bases, des triangles isoscèles semblables BCA′, CAB′, ABC′; les points A′, B′, C′ sont les sommets d'un triangle ayant



même centre de gravité que le triangle ABC. Il suffit, pour le prouver, de faire voir que la distance du centre de gravité de ABC à l'un des côtés de ce triangle est la moyenne arithmétique des distances de A′, B′, C′ à ce même côté.

Soit φ l'angle à la base des triangles considérés; prenons les distances des sommets au côté BC, par exemple; nous avons, d'après les notations adoptées, en appelant A′A″, B′B″, C′C″ ces distances :

$$A'A'' = A'B \sin \varphi, = \frac{a \sin \varphi}{2 \cos \varphi},$$

$$B'B'' = B'C \sin (C - \varphi) = \frac{b \sin (C - \varphi)}{2 \cos \varphi},$$

$$C'C'' = C'B \sin (B - \varphi) = \frac{c \sin (B - \varphi)}{2 \cos \varphi}.$$

Ajoutons, nous aurons

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = \frac{a \sin \varphi + b \sin (C - \varphi) + c \sin (B - \varphi)}{2 \cos \varphi}$$

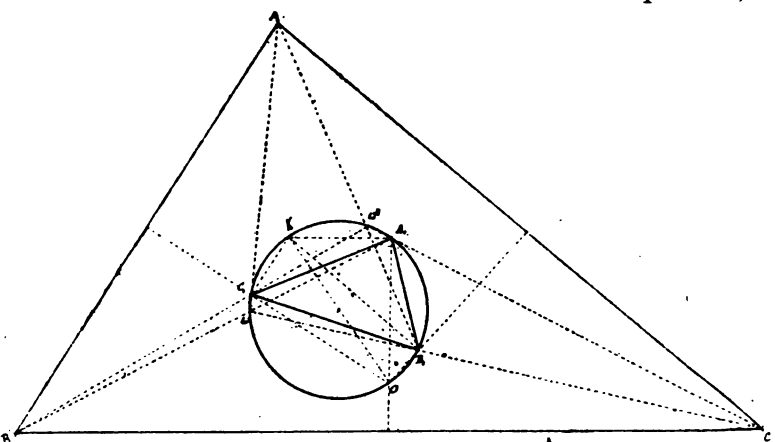
en réduisant, nous trouvons que le facteur de sin φ s'annule et il reste

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = \frac{b \sin C + c \sin B}{2} = h_a,$$

en appelant h_a la hauteur correspondant au côté a. Donc, la somme de ces distances est bien égale à trois fois la distance du centre de gravité de ABC au côté BC. On prouverait de même que la somme des distances de A′, B′, C′, au côté CA est égale à trois fois la distance du centre de gravité de ABC au côté CA.

Il en résulte bien que le centre de gravité du triangle A′B′C′ est confondu avec le centre de gravité du triangle ABC, *quel que soit l'angle* φ.

15. — Considérons sur le cercle de Brocard le point K,



diamétralement opposé au centre O du cercle circonscrit à ABC. L'angle OC_1K est droit; donc OC_1, étant perpendiculaire à AB, C_1K est parallèle à AB; on verrait de même que A_1K est parallèle à BC, et que B_1K est parallèle à AC. Par suite on a ce théorème :

Si par le sommet de chacun des triangles isoscèles ABC_1, BCA_1, CAB_1, *on mène une parallèle à la base, ces trois droites con-*

courent en un même point, qui est sur le cercle de Brocard et diamétralement opposé au point O, *centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

16. — De plus, les distances du point K à chacun des côtés AB, BC, CA, sont respectivement égales aux distances à ces mêmes côtés des sommets C_1, A_1, B_1; or, ces points étant les sommets de triangles isoscèles semblables, les distances sont proportionnelles aux côtés; donc *les distances du point* K *aux trois côtés du triangle sont proportionnelles à ces côtés.*

17. — Les triangles A_1BC et KBC sont équivalents, puisque la ligne A_1K est parallèle à BC; il en est de même des triangles B_1CA et KCA; des triangles C_1AB et KAB. Mais les triangles ayant pour sommet commun le point K, et pour bases les côtés du triangle ABC, ont évidemment pour somme la surface du triangle ABC; donc

La somme des surfaces des triangles isoscèles semblables ayant pour bases les côtés du triangle et pour sommets les points A_1, B_1, C_1, est égale à la surface du triangle ABC.

18. — Si l'on considère une médiane d'un triangle, et la symétrique de cette médiane par rapport à la bissectrice issue du même sommet, on a une nouvelle droite que M. Émile Lemoine a appelée la *médiane antiparallèle* du triangle; il est facile de voir que si d'un point de la médiane antiparallèle on abaisse des perpendiculaires sur les deux côtés aboutissant au même sommet que cette médiane, ces perpendiculaires sont proportionnelles aux côtés sur lesquelles elles tombent; par suite, ces droites se coupent en un point, dont les distances aux côtés sont proportionnelles à ces côtés, et qui, par suite, n'est autre chose que le point K. Ce point est celui que M. Lemoine appelé le *centre des médianes antiparallèles.*

19. — Nous avons vu précédemment que les deux points segmentaires ω et ω' sont tels que si on les joint à un même sommet, A par exemple, les deux lignes ainsi obtenues sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle A. Dans un mémoire publié dès 1865 par M. le colonel Mathieu, alors



capitaine, dans les *Nouvelles Annales*, l'auteur s'occupe d'un certain mode d'inversion déterminé ainsi : Par les sommets d'un triangle on mène trois droites concourant en un même point, et, par chaque sommet, la symétrique par rapport à la bissectrice de la droite correspondante ; ou, comme l'appelle l'auteur, l'*inverse* de cette droite. Ces droites se coupent en un même point, que le colonel Mathieu appelle l'*inverse* du premier.

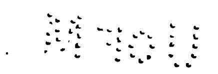
Ce théorème est très facile à démontrer d'une manière élémentaire. En effet, une droite passant par le sommet d'un triangle peut être définie par le rapport de ses distances aux deux côtés qui comprennent l'angle considéré ; soit donc une droite définie par le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ des distances d'un point aux deux côtés AB et BC ; il est évident que sa symétrique par rapport à la bissectrice est déterminée par le coefficient $\frac{\mu}{\lambda}$, en prenant les distances dans le même ordre.

Cela posé, on peut déterminer deux droites par les coefficients $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\mu}{\nu}$; la droite passant par le troisième sommet et le point de rencontre des deux premières est alors déterminé par le rapport $\frac{\lambda}{\nu}$.

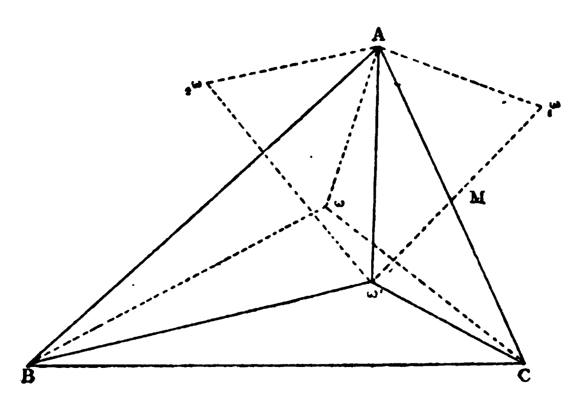
Les inverses des deux droites auront pour coefficient $\frac{\mu}{\lambda}$ et $\frac{\nu}{\mu}$; la droite qui passe par leur point de rencontre et le troisième sommet a pour coefficient $\frac{\nu}{\lambda}$; c'est donc l'inverse de la troisième droite.

20. — Une propriété intéressante de deux points inverses est que *ces deux points peuvent toujours être considérés comme les foyers d'une conique inscrite au triangle.*

Prenons par exemple les deux points segmentaires, qui sont deux points inverses. Soit ω_1 le symétrique de ω par rapport à AC ; il résulte de la définition des points ω_1 et ω'



que $\omega' A\omega_1 = BAC$; de même si ω_2 est le symétrique de ω par rapport à AB, on a $\omega' A\omega_2 = BAC$; les deux triangles $\omega' A\omega_1$



et $\omega' A\omega_2$ sont donc égaux, et $\omega'\omega_1 = \omega'\omega_2$. On verrait de même que, si l'on prenait le symétrique de ω par rapport à BC, le cercle décrit de ω' comme centre avec $\omega'\omega_1$ pour rayon passerait par ce troisième point. Donc l'ellipse ayant pour foyers ω et ω' et son grand axe égal à $\omega'\omega_1$ est tangente aux trois côtés du triangle ABC.

Il en résulte que, si l'on projette les points inverses ω e ω sur les côtés du triangle, *les six points ainsi obtenus sont sur une même circonférence*, qui a pour centre le milieu de $\omega\omega'$ et son diamètre égal à $\omega'\omega_1$.

21. — On obtient facilement les axes de l'ellipse inscrite au triangle ABC, et ayant pour foyers ω et ω'. En effet, le triangle $A\omega'\omega_1$ donne

$$\omega'\omega_1^2 = A\omega^2 + A\omega'^2 - 2A\omega_1.A\omega' \cos A.$$

Mais nous savons que l'on a

$$A\omega = \frac{b^2c}{K}, \quad A\omega' = \frac{c^2b}{K}$$

en posant $$K = \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

On en tire, après réductions faciles, en exprimant cos A en fonction des trois côtés,

$$\omega'\omega_1^2 = \frac{a^2b^2c^2}{K^2}$$

ou $$\omega'\omega_1 = \frac{abc}{K} = \frac{4RS}{K}.$$

D'autre part, on a vu que l'on avait

$$\sin \alpha = \frac{2S}{K}.$$

Donc $$\omega'\omega_1 = 2R \sin \alpha.$$

Nous avons vu en outre que la distance des deux points segmentaires avait pour expression

$$\omega\omega' = 2R \sin \alpha \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

On en tire facilement pour le carré du petit axe

$$\omega'\omega_1^2 - \omega\omega'^2 = 16R^2 \sin^4 \alpha;$$

donc l'ellipse considérée a pour axes

$$2R \sin \alpha, \quad \text{et} \quad 4R \sin^2 \alpha.$$

22. — Cherchons à déterminer la position du point M de contact de l'ellipse avec le côté AC. Pour cela, nous remarquerons que les valeurs trouvées plus haut pour $A\omega_1$, $A\omega'$ et $\omega'\omega_1$ nous donnent les relations

$$\frac{A\omega_1}{b} = \frac{A\omega'}{c} = \frac{\omega'\omega_1}{a}.$$

Donc le triangle $A\omega'\omega_1$ est semblable au triangle ABC, et l'angle ω' est égal à l'angle B. Du reste, on sait que l'angle $\omega'AM$ est égal à α; donc dans le triangle $A\omega'M$ on a

$$\frac{AM}{\sin B} = \frac{A\omega'}{\sin(B+\alpha)}.$$

On verrait de même que l'angle $M\omega'C$ est égal à A, et que l'on a

$$\frac{CM}{\sin A} = \frac{C\omega'}{\sin(B+\alpha)}.$$

Donc $$\frac{CM}{AM} = \frac{C\omega' \sin A}{A\omega' \sin B}.$$

Mais $$C\omega' = \frac{b^2a}{K}\,;\; A\omega' = \frac{c^2b}{K};$$

donc $$\frac{C\omega'}{A\omega'} = \frac{ab}{c^2}.$$

D'autre part on a $$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}.$$

Donc $$\frac{CM}{AM} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Il résulte de là que le point M est le pied de la médiane antiparallèle correspondant au sommet B. Donc

L'ellipse inscrite au triangle ABC, *et ayant ses foyers aux points segmentaires, a ses points de contact aux pieds des médianes antiparallèles du triangle* ABC.

(A suivre.)

SUR UN POINT DE LA DISCUSSION

DU SECOND DEGRÉ

Par M. **P. Barrieux,** professeur au lycée de Mont-de-Marsan.

(*Suite*, voir page 78.)

Problème II. — *Étant donnés une sphère et un de ses plans diamétraux, mener un second plan parallèle au premier, de telle sorte que le volume du segment sphérique compris entre les deux plans soit au volume du tronc de cône inscrit dans le segment dans un rapport donné* m. (B. S. Paris.)

Désignons par R le rayon de la sphère, par y la hauteur du segment, et par x le rayon de sa petite base. Les deux équations du problème seront

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{6}\pi y^3 + \frac{1}{2}\pi y\,(R^2 + x^2) = \frac{1}{3} m\pi y\,(R^2 + Rx + x^2) \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{array}\right.$$

d'où, éliminant y et simplifiant,

$$(m - 1)x^2 + mRx + (m - 2)R^2 = 0. \qquad (1)$$

Discussion. — Les valeurs positives de x donneront des troncs de première espèce, les valeurs négatives des troncs de deuxième espèce.

Par conséquent, il faut et il suffit que les racines de l'équation (1) soient réelles et comprises entre $-$ R et $+$ R.

La condition de réalité est

$$m^2R^2 - 4(m - 1)(m - 2)R^2 \geq 0$$

ou

$$-3m^2 + 12m - 8 \geq 0,$$

d'où l'on tire aisément

$$\frac{b-2\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \frac{b+2\sqrt{3}}{3}. \qquad (2)$$

Si l'on désigne par P le produit des facteurs obtenus en remplaçant successivement x par $+$ R et $-$ R dans le premier membre de l'équation (1), on a

$$\begin{aligned} P &= R^4 (m-1+m+m-2)(m-1-m+m-2) \\ &= 3R^4 (m-1)(m-3) \end{aligned}$$

et l'on voit que P est négatif pour toutes les valeurs de m comprises entre 1 et 3, positif pour toutes les autres.

La condition $x'^2x''^2 < R^2$ donne

$$\frac{(m-2)^2R^4}{(m-1)^2} < R^4$$

d'où

$$\begin{gathered} (m-2)^2-(m-1)^2 < 0, \\ -(2m-3) < 0, \\ m > \frac{3}{2}. \qquad (3) \end{gathered}$$

Le produit des racines étant de même signe que $(m-1)(m-2)$ R^2, on voit que les racines seront de signe contraire pour toutes les valeurs de m comprises entre 1 et 2, de même signe pour toutes les autres.

La somme des racines étant de même signe que

$$-m(m-1)\,R$$

cette somme sera positive pour les valeurs de m comprises entre 0 et 1, négative pour toutes les autres.

Nous pouvons résumer tous ces résultats dans les deux tableaux suivants:

$$\text{var. de } m \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\frac{b-2\sqrt{3}}{3} \ldots 1}^{P>0} \overbrace{\ldots \frac{3}{2} \ldots 2 \ldots 3}^{P<0} \overbrace{\ldots \frac{b+4\sqrt{3}}{3}}^{P>0} \\ \underbrace{\frac{b-2\sqrt{3}}{3} \ldots 1 \ldots \frac{3}{2}}_{x'^2x''^2 > R^4} \underbrace{\ldots 2 \ldots 3 \ldots \frac{b+4\sqrt{3}}{3}}_{x'^2x''^2 < R^4} \end{array} \right.$$

$$\text{var. de } m \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\frac{b-2\sqrt{3}}{3} \ldots 1}^{x'x''>0} \overbrace{\ldots \frac{3}{2} \ldots 2}^{x'x''<0} \overbrace{\ldots 3 \ldots \frac{b+2\sqrt{3}}{3}}^{x'x''>0} \\ \underbrace{\frac{b-2\sqrt{3}}{3} \ldots 1}_{x'x''>0} \underbrace{\ldots \frac{3}{2} \ldots 2 \ldots 3 \ldots \frac{b+2\sqrt{3}}{3}}_{x'+x''<0} \end{array} \right.$$

Il n'y a pas lieu d'examiner les valeurs de m moindres que $\frac{b - 2\sqrt{3}}{3}$ ou plus grandes que $\frac{b + \sqrt{3}}{3}$, puisque pour ces valeurs les racines de l'équation (1) sont imaginaires.

Nous avons trois cas à examiner :

Premier cas. $\frac{b - 2\sqrt{3}}{3} < m < 1.$

On a en même temps $P > 0$ et $x'^2x''^2 > R^4$. Aucune racine n'est donc comprise entre $-R$ et $+R$. Donc *pas de solution.*

Deuxième cas. $1 < m < 3.$

On a $P < 0$. Celle des deux racines qui a la plus petite valeur absolue est donc seule comprise entre $-R$ et $+R$. (Th. I.)

En nous servant du deuxième tableau, nous pouvons constater les résultats suivants :

1° $1 < m < 2$. Les deux racines sont de signe contraire et la racine positive est la plus petite en valeur absolue. Donc *une solution positive donnant un tronc de première espèce.*

2° $2 < m < 3$. Les deux racines sont négatives. On prendra la plus petite en valeur absolue. Donc *une solution négative donnant un tronc de deuxième espèce.*

Troisième cas. $3 < m \leq \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}.$

On a en même temps $P > 0$ et $x'^2x''^2 < R^4$. Les deux racines sont donc comprises entre $-R$ et $+R$. (Th. II). Les deux racines conviennent.

Le deuxième tableau montre que ces deux racines sont négatives. Donc *deux solutions négatives donnant deux troncs de deuxième espèce.*

Pour la valeur limite $m = \frac{b + 2\sqrt{3}}{3}$ on a une racine double négative.

Tableau de la discussion :

	1re espèce	2e espèce
$\frac{b-2\sqrt{3}}{3} < m < 1$	.... 0	.... 0 ....
$1 < m < 2$	.... 1	.... 0 ....
$2 < m < 3$	.... 0	.... 1 ....
$3 < m \leq \frac{b+2\sqrt{3}}{3}$	.... 0	.... 2 ....
$m > \frac{b+2\sqrt{3}}{3}$	.... 0	.... 0 ....

On peut saisir par ces deux exemples les avantages de la méthode que nous proposons. Quand les deux tableaux des variations du paramètre ont été dressés, la discussion est virtuellement faite et les détails s'en dégagent très aisément.

Les deux théorèmes dont nous venons de faire usage ne sont que des cas particuliers d'un théorème général qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Théorème. — *Étant donnés deux nombres quelconques α, β, et l'équation du second degré,*

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

1° Si l'on a

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) < 0,$$

les deux racines de l'équation (1) *sont réelles, et l'une d'elles est comprise entre α et β ;*

2° Si l'on a en même temps

$$\begin{cases}(a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) > 0,\\ (2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c)(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0,\end{cases}$$

les deux racines de l'équation (1) *sont supposées réelles et sont comprises entre α et β.*

Voici comment on peut démontrer ce théorème (*) :

(*) Cette démonstration nous a été inspirée par la question suivante, proposée par Jacobi et résolue par M. Laisant dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* de Catalan, t. V, p. 23. — « Discuter le nombre de racines réelles comprises entre a et b au moyen de la substitution $y = \frac{b-x}{x-a}$. »

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0.$ (1)

Faisons un changement d'inconnue et posons

$$y = \frac{\beta - x}{x - \alpha}. \qquad (2)$$

A toute valeur réelle de x correspondra une valeur réelle de y, et réciproquement. De plus y sera positif pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, négatif pour toutes les autres.

En portant dans l'équation (1) la valeur de x tirée de l'équation (2), on a, tous calculs faits,

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)\, y^2 + (2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c)\, y + a\beta^2 + b\beta + c = 0. \qquad (3)$$

Donc : 1° si l'on a

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)\,(a\beta^2 + b\beta + c) < 0 \qquad (4)$$

Les deux valeurs de y fournies par l'équation (3) sont réelles et de signes contraires ; donc les deux racines de l'équation (1) sont réelles et l'une d'elles est comprise entre α et β.

2° Si les racines de l'équation (1) sont réelles, et si l'on a en même temps

$$(I) \quad \begin{cases} (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,(a\beta^2 + b\beta + c) > 0, & (5) \\ (2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c)\,(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0. & (6) \end{cases}$$

les deux racines de l'équation (3) seront réelles et positives, et par suite les deux racines de l'équation (1) seront comprises entre α et β. — Le théorème est donc démontré.

Remarque I. — Pour le cas particulier où $\beta = -\alpha$, le système I devient

$$\begin{cases} (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,(a\alpha^2 - b\alpha + c) > 0, & (7) \\ (c - a\alpha^2)\,(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0, & (8) \end{cases}$$

Ce système peut se simplifier en observant que les deux facteurs de l'inégalité (7) étant de même signe, leur somme $2(c + a\alpha^2)$ a le même signe que chacun d'eux. On peut donc, dans l'inégalité (8), remplacer le facteur $(a\alpha^2 + b\alpha + c)$ par le facteur de même signe $(c + a\alpha^2)$, et le système devient

$$\begin{cases} (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,(a\alpha^2 - b\alpha + c) > 0, \\ (c - a\alpha^2)\,(c + a\alpha^2) < 0. \end{cases}$$

Remarque II. — Pour le cas particulier où $\alpha = 0$, le sys-

tème (I) devient

$$\begin{cases} c\,(a\beta^2 + b\beta + c) > 0, & (9) \\ c\,(b\beta + 2c) < 0. & (10) \end{cases}$$

Toutes ces formules peuvent être introduites utilement dans la discussion des problèmes du second degré.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Poitiers.

D'un point I, pris sur une droite DD', et à une distance IF $= a$ d'un point fixe F, on mène une droite quelconque HH' faisant les angles α et β avec DD' et IF. A quelle distance x du point I trouvera-t-on sur cette droite un point M, équidistant de E et de DD'? Discuter les conditions de possibilité. — Quelle relation doit-il exister entre les angles α et β dans le cas d'une solution unique? Déduire de cette relation la propriété de la tangente à la parabole.

Lille.

Une cuvette ayant à peu près la forme d'un verre de montre est limitée par deux surfaces dont les coupes MSN, MS'N faites par un plan vertical mené suivant l'axe de révolution sont des paraboles telles que la distance FF' de leurs foyers respectifs vaut le double de l'épaisseur $e =$ SS' de la cuvette à l'endroit le plus bas. On demande à quelle distance au-dessus ou au-dessous du plan horizontal MN se trouvent situés ces deux foyers F et F', sachant que l'épaisseur SS' ou e est de un centimètre.

— Le 10 juillet 1882, à midi moyen, la déclinaison du soleil est boréale, et égale à 22°14'. On demande pour ce même jour ; 1° quelle est la hauteur du soleil à midi au-dessus de l'horizon de Lille (latitude 50°38'44"); 2° quels sont les points de la terre qui le voient passer à leur zénith ; 3° quels sont les points de la terre pour lesquels il ne se couche pas.

— Effectuer la somme suivante, composée des sommes d'une infinité de progressions prolongées à l'infini :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots \\
+&\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots \\
+&\frac{1}{17}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{17^3}+\ldots \\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+&\frac{1}{4^n+1}+\frac{1}{(4^n+1)^2}+\frac{1}{(4^n+1)^3}+\ldots
\end{aligned}
$$

à l'infini.

— Par le sommet d'un angle A d'un triangle ABC, on mène une droite AD faisant avec AB un angle x. Comment faut-il prendre cet angle de manière que, si l'on fait tourner la figure autour de AB, le volume engendré par ADB soit le quart du volume engendré par ABC. (Les éléments du triangle sont connus; mais les formules demandées ne devront contenir que les angles A,B,C).

— Connaissant deux côtés d'un triangle et la médiane qui part de leur point de concours, trouver l'angle de ces deux côtés.

— Une pierre homogène, dont la densité est 3, est taillée en forme de tétraèdre; elle repose sur le sol, et a pour base horizontale un triangle équilatéral ABC de un mètre de côté ; sa hauteur SA tombe sur le milieu H du côté AB. On demande quelle force horizontale SF parallèle à CH il faudra appliquer au sommet S pour ébranler la pierre en la faisant tourner autour de AB, support fixé sur le sol.

— Une ellipse et une parabole ont un foyer commun, et le sommet de la parabole coïncide avec le centre de l'ellipse. Connaissant le grand axe et la distance focale de l'ellipse, trouver la distance du foyer commun à l'un des points d'intersection, et la distance de ce même foyer aux points de rencontre de l'axe commun : 1° avec la tangente à la parabole au point de rencontre; 2° avec la normale à l'ellipse au même point.

— Connaissant dans un triangle b et c et la longueur α de la bissectrice de l'angle qu'ils comprennent, calculer cet angle, ainsi que les segments déterminés par la bissectrice sur le troisième côté.

— Les deux faces d'une lentille biconcave ont pour sections. faites par un plan mené suivant l'axe principal, deux paraboles égales. Le diamètre de la lentille est 2 décim.; l'épaisseur sur le bord 5 millim., l'épaisseur sur l'axe 1 millimètre. On demande à quelle distance l'un de l'autre sont les foyers des deux paraboles.

— Vitesse dans un mouvement varié. La calculer quand $e = \frac{1}{3}t^3$.

— Trouver la surface d'un triangle dont les hauteurs sont respectivement 200^m, 210^m et 220^m.

— Un trapèze a ses bases respectivement de 400^m et de 300^m, et sa hauteur est de 200^m. A quelle distance de la grande base faut-il mener une parallèle à cette base pour en détacher une bande de un hectare contiguë à la grande base.

— Étant donné un cercle O et un point A dans le plan de ce cercle, à une distance a du centre, on mène par ce point A une corde BC de longueur d. Calculer les segments AB, AC, et l'angle OAC.

Paris.

On lance de bas en haut, sur une même verticale, et à deux secondes d'intervalle, deux corps pesants avec une même vitesse de 25 mètres par seconde. On demande comment varie la distance qui sépare en deux corps, et en quel point ils se rencontreront.

— A quelle condition doivent satisfaire les deux nombres a et b pour qu'il existe des valeurs réelles de x vérifiant l'équation $$a \sin x + b \cos x = 1.$$

— Le rayon de la base d'un cône est R; son apothème est a. Un plan P, parallèle à la base du cône, divise le solide en deux parties qui ont la même surface totale. Ex-

primer à l'aide de r et de R la distance du plan au sommet du cône.

— On donne $\cos 2a = \frac{1}{2}$ trouver $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

— Étant donnée une circonférence de rayon R, on considère un parallélogramme circonscrit ABCD. Démontrer que ce parallélogramme est un losange, et que l'on a

$$\frac{1}{\overline{AC}^2} + \frac{1}{\overline{BD}^2} = \frac{1}{4R^2}.$$

Quel est, parmi tous ces losanges circonscrits, celui qui a la plus petite surface ?

— Deux sphères égales, de rayon R, sont placées de telle manière que chacune d'elles passe par le centre de l'autre. Calculer le volume commun aux deux sphères.

— Si les extrémités A et B d'une corde AB de longueur constante glissent sur une circonférence de rayon R, un point quelconque de la corde mobile décrit également une circonférence. Calculer la surface de la couronne comprise entre les deux circonférences connaissant la longueur $AC = a$, $Bc = b$ des deux segments de la corde.

— a et b étant donnés, entre quelles limites m doit-il être compris pour que l'équation $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x+m}$ ait ses racines réelles?

— Sur les quatre côtés d'un carré ABCD on construit des triangles équilatéraux. Démontrer que le quadrilatère formé en joignant les sommets extérieurs de ces triangles est un carré, et calculer sa surface.

EXAMENS ORAUX POUR SAINT-CYR

— On donne un triangle rectangle ABC, mener DE parallèle à AC telle que la figure tournant autour de AB, la ligne brisée CDE engendre une surface égale à πm^2.

— Déterminer l'angle aigu x d'un triangle rectangle ABC, pour que, si du sommet B de l'angle droit B on abaisse BD

perpendiculaire sur l'hypoténuse AC, on ait $AC^2 - 2BD^2 = K^2$. Discuter.

— On donne un demi-cercle AB et une tangente en B. Mener une droite AD rencontrant le cercle en C et la tangente en D, et telle que $2AC^2 + AD^2 = 4K^2$. Prendre pour inconnue l'angle en A.

— On donne un demi-cercle AB et une corde PQ, parallèle à AB; on joint QB et AP. Déterminer PQ pour que l'on ait $AP^2 + PQ^2 + QB^2 = 4m^2$.

— On donne un triangle rectangle ABC. Du sommet A de l'angle droit on abaisse AD perpendiculaire sur BC, puis DE perpendiculaire sur AC et ainsi de suite. Trouver la limite de la somme de toutes ces perpendiculaires.

— On donne un cercle et deux diamètres rectangulaires. Trouver sur le quadrant CB un point M tel que, si on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur les deux diamètres, la surface totale engendrée par le rectangle en tournant autour de CD soit égale à $2\pi m^2$.

— On donne un triangle équilatéral. Prendre sur le prolongement de la base CB un point M tel qu'en menant par M une sécante MPQ les deux surfaces PBM et PQA soient dans un rapport donné. On donne $BC = a$, $BM = d$. Prendre pour inconnue l'angle en M.

— Résoudre un triangle rectangle connaissant le périmètre $2p$ et la hauteur h.

— Dans un triangle rectangle on donne l'hypoténuse a et la bissectrice de l'angle B. Calculer B.

— On donne un demi-cercle AB. Comment faut-il mener la corde CD parallèle à AB pour que $\frac{CD}{AC} = K$?

— On donne un demi-cercle AB. Déterminer l'angle en A que doit faire une corde AP rencontrant la tangente BC en Q pour que, si on fait tourner la figure autour de AB, la somme des volumes engendrés par le secteur APNB et le triangle curviligne PNBQ soit égale à un volume donné.

— On donne une circonférence O tangente en A à une droite xy. Quelle doit être la position d'un diamètre CD pour que

si des extrémités C et D on abaisse des perpendiculaires sur xy, CE, DE, on ait

$$\text{surf. EC} + \text{sur CD} + \text{surf. DF} = \pi m^2.$$

— On donne un demi-cercle AB. Placer un rayon OC de telle sorte que surf. OC + surf. CMB $= \pi m^2$, on tourne autour de AB.

— On donne trois cercles tangents extérieurement, de rayons R, R'. R''. Calculer les angles sous lesquels les droites qui joignent les centres se coupent. Aire du triangle curviligne compris entre les trois cercles.

— On mène les deux tangentes communes à deux cercles tangents extérieurement. Connaissant les rayons R et R' de ces cercles, calculer l'angle α de leurs tangentes.

— Calculer le volume d'un cône en fonction de l'angle au sommet 2α et du rayon R de la sphère qui lui est inscrite.

QUESTION 65

Solution par M. Amaury de Kerdrel, à Keruzoret.

Démontrer les propositions suivantes :

1° La somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par trois fois le terme du milieu et toujours par 9.

2° Le nombre $\dfrac{n^3 + (n+2)^3}{4}$ *est toujours un nombre entier; il est de plus toujours un nombre composé, excepté pour* $n = 1$.

3° Les nombres de la forme arithmétique $n^4 + n^2 + 1$ *sont toujours composés, excepté pour* $n = 1$. (G. L.)

Les trois nombres étant consécutifs sont de la forme

$$a - 1, \quad a, \quad a + 1.$$

La somme de leurs cubes est donc

$$3a^3 + 6a \quad \text{ou} \quad 3a(a^2 + 2).$$

Sous cette forme on voit qu'elle est divisible par $3a$. Pour prouver qu'elle est aussi divisible par 9, il suffit de faire voir que $a(a^2 + 2)$ est toujours un multiple de 3. Si a est un multiple de 3, la proposition est évidente. Autrement a est

de la forme $3k \pm 1$ et $a^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3$, ce qui est toujours divisible par 3.

Donc la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

2° Le nombre $\frac{n^3 + (n+2)^3}{4}$ se réduit en divisant la somme des deux cubes par la somme de leurs racines à

$$\frac{(n+1)\,[n^2 - n(n+2) + (n+2)^2]}{2} = \frac{(n+1)(n^2+2n+4)}{4}$$

Sous cette forme on voit que le nombre proposé est toujours entier ; et de plus qu'il est toujours composé, excepté pour $n = 1$.

3° Les nombres arithmétiques de la forme $n^4 + n^2 + 1$ reviennent à $$(n^2+1)^2 - n^2$$ ou $$(n^2+n+1)(n^2-n+1)$$

Ils sont donc toujours composés excepté dans le cas où $n = 1$.

QUESTION 68

Solution par M. Perrin, élève du Lycée Charlemagne.

On considère un cercle fixe Δ, *et un diamètre fixe* PQ *de ce cercle. Soit* A *un point supposé mobile sur* Δ; *abaissons de ce point une perpendiculaire* AB *sur* PQ, *et du point* A *comme centre, avec* AB *comme rayon, décrivons une circonférence qui rencontre* Δ *aux points* C *et* D ; *la droite* CD *rencontre* AB *au point* I.

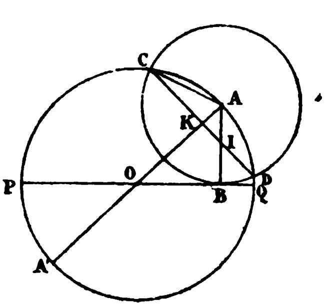
1° Trouver le lieu décrit par le point I ;

2° Démontrer que si l'on considère sur Δ *deux points* A *et* A' *tels que la corde* AA' *soit vue du centre* O *sous un angle droit, et si l'on répète au point* A' *la construction indiquée pour le point* A, *les distances du point* O *aux deux cordes* CD *et* C'D' *ainsi déterminées ont une somme constante;*

3° Étudier les variations de CD *quand le point* A *se déplace sur* Δ ;

4° *Après avoir remarqué que le point* I *est le milieu de* AB, *on propose de démontrer que les cercles décrits sur* BP *et* BQ *comme diamètres sont tangents l'un et l'autre à la droite* CD';

5° CD *rencontre* PQ *en un point* R; *démontrer que la polaire du point* R *par rapport aux droites* AP *et* AQ *passe par le pied de la perpendiculaire abaissée de* B *sur* CD. (G. L.)



1° Soit O le centre du cercle fixe, K le point d'intersection de AO avec CD et A' le point diamétralement opposé à A.

Les triangles semblables AKI, ABO donnent

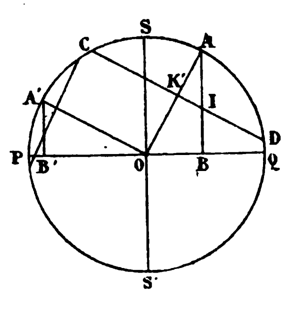
$$AI \cdot AB = AK \cdot AO;$$

mais $$AK \cdot AO = \frac{AK \cdot AA'}{2} = \frac{\overline{AC}^2}{2} = \frac{AB^2}{2}$$

donc $$AI = \frac{AB}{2}$$

et I est le milieu de AB; le lieu de I est donc une ellipse ayant PQ pour grand axe et pour petit axe $\frac{PQ}{2}$.

2° De $$AK \cdot AO = \frac{\overline{AB}^2}{2}$$



on tire $$AK = \frac{\overline{AB}^2}{2AO};$$

d'où $$OK = AO - \frac{\overline{AB}^2}{2AO}; \quad (1)$$

de même $$OK' = A'O - \frac{\overline{A'B'}^2}{2A'O}$$

mais $AO = A'O$

$$\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$$

puisque les triangles AOB, A'OB' sont égaux : donc

$$OK + OK' = 2AO - \frac{AO}{2} = \frac{3AO}{2}$$

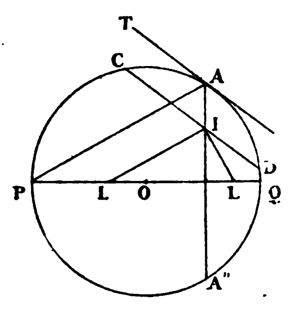
et par suite OK + OK' est constant.

3° $$\overline{CK}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OK}^2;$$

mais d'après (1) OK varie de AO à $\frac{AO}{2}$ quand A se déplace de Q en S, QS étant le rayon perpendiculaire à PQ; donc $\overline{CK}^2$ part de O quand A est en Q, croît à mesure que A se rapproche de S et atteint son maximum $\frac{3}{4}\,\overline{AO}^2$ lorsque A est en S; par suite CD varie de O à $AO\sqrt{3}$ quand le point A se déplace de Q en S.

Quand le point A va de S en P, CD décroît de $AO\sqrt{3}$ à O, puis le point A allant de P en S' diamétralement opposé à S', CD croît de nouveau de O à $AO\sqrt{3}$ pour décroître ensuite de $AO\sqrt{3}$ à O quand le point A décrit l'axe S'Q.

4° Soit L le milieu de PB; joignons AP, LI; A étant milieu de l'arc CD, la tangente AT en A à la circonférence Δ est parallèle à la corde CD. P est le milieu de l'arc AA'', A'' étant le symétrique de A par rapport au diamètre PQ; donc PA est bissectrice de l'angle TAB, et LI qui lui est parallèle est bissectrice de l'angle CIB.



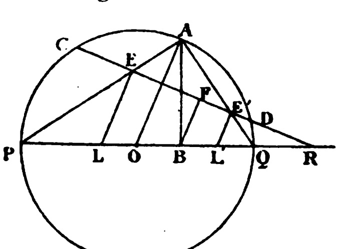
La circonférence de rayon LB sera donc tangente à la corde CD.

On verrait de même que la circonférence de rayon L'B sera tangente à la même corde.

5° Abaissons de L la perpendiculaire LE sur CD :

$$LE = LB = LP;$$

d'autre part AO = OP; les triangles PLE, PAO sont semblables et les trois points P, E, A sont en ligne droite.



De même E' étant le pied de la perpendiculaire abaissée de L' sur CD, les trois points Q, E', A sont en ligne droite.

Abaissons de B la perpendiculaire BF sur CD :

on a
$$\frac{RL}{RL'} = \frac{LE}{L'E'} = \frac{BL}{BL'};$$
la division (RBLL') est donc harmonique et par suite la division (RFEE'), projection de la précédente sur RDC, l'est aussi et AF est la polaire de R par rapport aux droites AP, AQ.

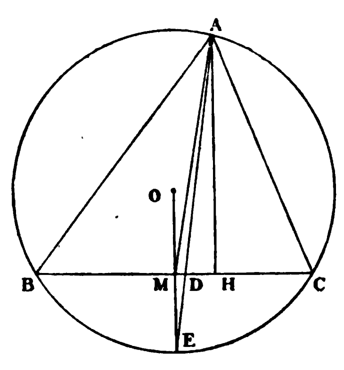
NOTA. — La même question a été résolue par MM. Vialard, à Cluny; Chapron, institution Peschard, à Vincennes; Gindre, à Pontarlier; Bordier, à Blanzac; de Kerdrell, à Keruzoret; Jean Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg; Giat, Rougelin, Sauve, à Moulin; G. La Cheinais, lycée Henri IV, à Paris; Aubry, à Charleville; Lafay, Bourgarel, à Toulon; Naura, à Vitry-le-François.

QUESTION 69

Solution par M. AUBRY, élève au Lycée de Charleville.

Dans un triangle ABC, *on a*
$$2R = \frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{m^2 - h^2}{l^2 - h^2}}$$
R, l, m, h, *étant respectivement le rayon du cercle circonscrit, la bissectrice, la médiane et la hauteur partant d'un même sommet.* (E. Lemoine.)

Soit en effet O le centre du cercle circonscrit; de ce point abaissons la perpendiculaire OM sur BC; elle rencontre BC en M et le cercle en E. On sait que AM est médiane et que AE est bissectrice de l'angle A. Soit de plus AH la hauteur correspondante au côté BC.



Les triangles semblables MDE et ADH donnent la proportion
$$\frac{DE}{AD} = \frac{MD}{DH};$$
d'où
$$\frac{AD.DE}{AD^2} = \frac{MD}{DH}.$$

En remarquant que AD.DE = BD.DC, l'égalité précédente devient $\frac{AD.DC}{AD^2} = \frac{MD}{DH}$. $\frac{AD^2 + BD.CD}{AD^2} = \frac{MD + DH}{DH}$.

Or, l'on sait que

$$AB.AC = AD^2 + BD.DC.$$

Donc

$$\frac{AB.AC}{AD^2} = \frac{MH}{DH}$$

et

$$AB.AC = AD^2 . \frac{MH}{DH}.$$

D'après un théorème connu

$$AB.AC = 2Rh$$

et de plus

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{m^2 - h^2} \quad DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{l^2 - h^2}.$$

Il vient donc finalement

$$2Rh = l^2 \sqrt{\frac{m^2 - h^2}{l^2 - h^2}}$$

ou

$$2R = \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{m^2 - h^2}{l^2 - h^2}}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. A. de Kerdrel, à Keruzoret; Bourgarel, à Toulon; Rougelin, à Moulins.

QUESTION 71

Solution par M. BOUGAREL, élève au Lycée de Toulon.

Dans un triangle ABC, *on mène les bissectrices* BD, CF *des angles en* B *et* C, *et la droite* DF. *Démontrer que si d'un point quelconque* M *de* DF, *on abaisse les perpendiculaires* MP, MQ, MN, *respectivement sur* AB, AC, BC, *on a*

$$MN = MP + MQ.$$

Des points D et F abaissons des perpendiculaires DG, DH, FI, FJ, sur les côtés opposés à ces points.

Les triangles semblables FMP, FDG, nous donnent

$$MP = \frac{FM}{FD} \times GD.$$

De même, les triangles semblables FDI, MQD nous donnent

$$MQ = \frac{MD}{FD} \times FI.$$

Mais on a $FI = FJ$, et $DG = DH$, puisque CF et BD sont les bissectrices des angles à la base.

D'autre part, on sait que l'on a

$$MD \times FI + MF \times GD = MN \times FD.$$

En comparant cette relation, mise sous la forme

$$\frac{MD}{FD} \times FI + \frac{MF}{FD} \times GD = MN,$$

à la somme des deux premières, on trouve bien

$$MN = MP + MQ.$$

Nota. — Ont résolu la même question MM. Taratte, à Évreux; Vialard, Berdon, à Cluny; Millot, à la Flèche; Giat, Julien Sauve, Rouzelin, à Moulins; Abadie, à Mont-de-Marsan; Aubry, à Charleville; Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg; Thiélou, école Lavoisier, à Paris.

QUESTIONS PROPOSÉES

88. — Étant donnée la série illimitée

7, 13, 25, 43, 67, 97, 133, 175, ...

dont le terme général, celui qui en a n avant lui, est

$$xn = 3(n^2 + n) + 7,$$

démontrer les propositions suivantes :

1. Sur cinq termes consécutifs, pris à volonté dans la série, un terme est divisible par 5;
2. Sur sept termes consécutifs, deux sont divisibles par 7;
3. Sur treize termes consécutifs, deux sont divisibles par 13;
4. Aucun terme de la série n'est égal à un cube;
5. Une infinité de termes, tels que $x_2 = 25$; $x_{39} = 4225$, etc., sont des carrés divisibles par 25.

Nota. — La deuxième et la troisième proportion sont comprises, comme cas particuliers, dans la suivante. Si N est un nombre premier, de la forme $6n + 1$, sur n termes consécutifs de la série, deux sont divisibles par N. — On peut affirmer aussi que, à l'exception de 5, aucun nombre premier

de la forme $6m - 1$ ne peut diviser la série ; mais ces propositions, que nous énonçons ici incidemment, et parce que l'occasion s'en présente, tiennent à des principes moins élémentaires que ceux qui servent à justifier les principes ci-dessus. (*S. Réalis.*)

89. — On donne trois points en ligne droite, A, B, C ; par A et B on fait passer une circonférence quelconque O ; soit P le pôle de AB par rapport à O ; la droite PC rencontre O en des points I et I' ; trouver le lieu de ces points, lieu qui est une circonférence. (*G. L.*)

90. — On considère une parabole P, et sur l'axe de cette courbe un point Q, situé à une distance $2p$ du sommet O. Soit A un point quelconque de P ; on projette A en B sur la tangente au sommet ; les droites QB et OA se coupent en un point I, dont on demande le lieu géométrique. (*G. L.*)

91. — On considère des paraboles P, ayant pour sommet un point fixe O et passant aussi par un autre point fixe A. 1° Les tangentes à P aux points O et A se coupent en un point I, trouver le lieu de ce point ; 2° la tangente au point A et l'axe de la parabole se coupent en un point I', trouver le lieu de ce point. On déterminera ces deux lieux par des considérations purement géométriques. (*École centrale, 1879.*)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9164-3.

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par **M. G. de Longchamps.**

(*Suite* et *fin*, voir pages 3, 25, 49 et 73.)

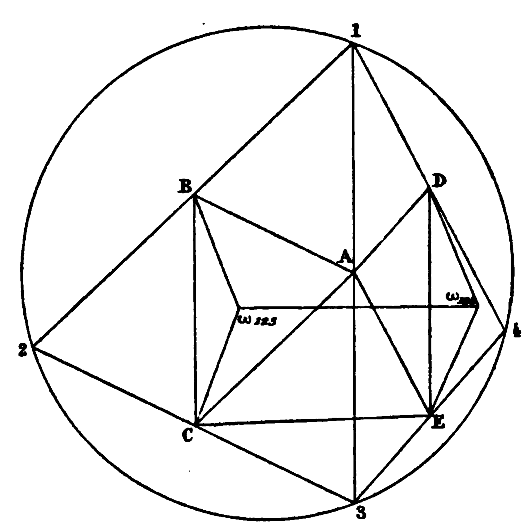
QUATRIÈME APPLICATION

Étude de géométrie récurrente sur le cercle des neuf points.

29. — Considérons maintenant quatre points 1, 2, 3, 4, sur une circonférence Δ, et désignons par ω_{123} le centre du cercle des neuf points du triangle 1, 2, 3.

Nous établirons d'abord la propriété suivante :

Théorème. — *La droite $\omega_\alpha\ \omega_\beta$, est parallèle à la droite qui joint les deux points, dont les numéros ne sont pas communs aux indices α et β, de plus elle est égale à la moitié de cette droite.*



Prenons, par exemple, les deux triangles 1, 2, 3 ; 1, 3, 4 : soit A le milieu de la corde 1, 3, point commun aux deux

circonférences ω_{123}, ω_{134} ; soient enfin B, C, D, E les milieux de cordes 1, 2 ; 2, 3 ; 1, 4 ; 3, 4. Les circonférences que nous voulons considérer sont celles qui sont circonscrites aux triangles ABC, ADE. Il est remarquable que ces circonférences sont égales.

En effet, les rayons de ces cercles sont donnés par les formules

$$R_{123} = \frac{BC}{2 \sin BAC}, \quad R_{134} = \frac{DE}{2 \sin DAE};$$

on a d'ailleurs BC = DE, chacune de ces droites étant égale à la moitié de la corde 1, 3 ; de plus, les angles BAC et DAE sont supplémentaires ; on a donc bien $R_{123} = R_{134}$.

Il résulte de cette remarque que les deux triangles $BC\omega_{123}$, $DE\omega_{124}$ sont égaux ; on voit aussi que leurs côtés sont, deux à deux, parallèles.

En particulier les côtés $C\omega_{123}$, $E\omega_{125}$ sont égaux et parallèles ; par suite, la figure $CE\omega_{123}\,\omega_{124}$ est un parallélogramme. Les deux lignes CE et $\omega_{123}\,\omega_{124}$ étant égales et parallèles, si l'on ajoute que CE est parallèle à la corde 2, 4, et égale à sa moitié, la proposition énoncée se trouve ainsi établie.

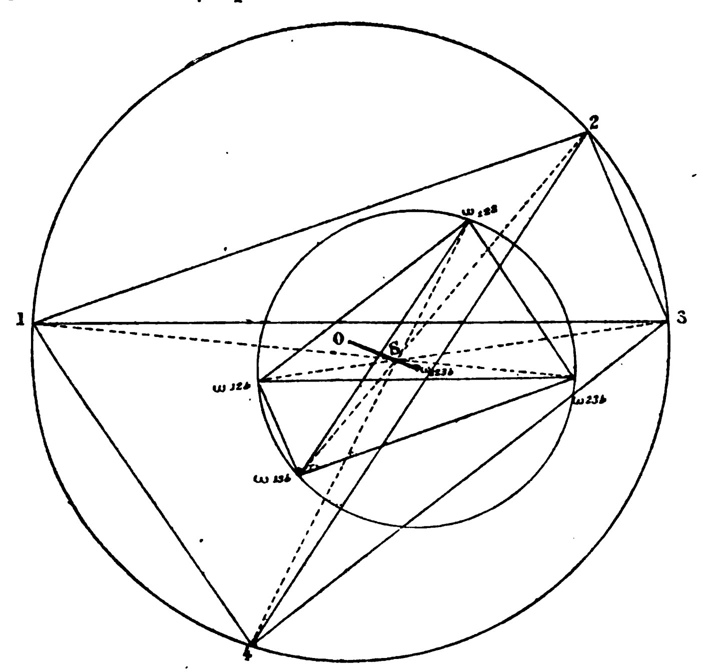
30. Théorème. — *Étant donnés quatre points sur une circonférence, si l'on considère les quatre triangles déterminés par ces points, pris trois à trois, et les centres des cercles des neuf points qui correspondent à ces triangles, les quatre points ainsi obtenus sont situés sur une circonférence.*

En effet, le quadrilatère ω_{123}, ω_{234}, ω_{341}, ω_{412}, est homothétique au quadrilatère proposé 1, 2, 3, 4. Les quatre points ω sont donc situés sur une même circonférence, dont nous désignerons le centre par ω_{1234}.

L'homothétie de ces deux quadrilatères prouve encore que la droite qui joint le point 1 à ω_{234}, et les trois droites analogues, concourent au même point S_{1234}. Ce point S_{1234} est situé sur la droite qui joint le centre O de la circonférence donnée au point ω_{1234}, et partage intérieurement cette droite, dans le rapport de 2 à 1. En d'autres termes on a $S_{1234}O = 2S_{1234}\omega_{1234}$.

31. — Prenons maintenant cinq points 1, 2, 3, 4, 5, sur

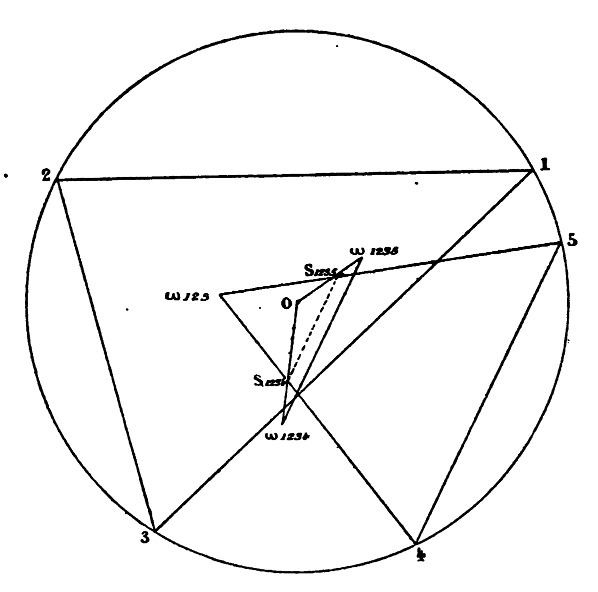
une circonférence de centre O; ces points étant combinés quatre à quatre, on obtient, par la propriété précédente, cinq points ω d'ordre 4, que nous allons considérer.



Les deux cercles ω_{1234}, ω_{1235} ont un point commun, le point ω_{123}. D'après ce que nous avons dit tout à l'heure, si l'on joint ω_{123} au point 4, et si l'on partage cette droite dans le rapport de 1 à 2, on obtient un point S_{1234}, qui est tel que la droite OS_{1234}, prolongée d'une longueur moitié moindre donne justement le point ω_{1234}. En appliquant cette remarque au quadrilatère 1, 2, 3, 5, on obtient la point ω_{1235} et la similitude des triangles fait reconnaître facilement que la droite ω_{1234} ω_{1235} est parallèle à la corde 4, 5, et égale à sa moitié.

De cette remarque on conclut que les cinq points ω, d'ordre 4, sont situés sur une circonférence dont le centre est désigné par ω_{12345}. Il est facile de généraliser ces propriétés

et laissant au lecteur le soin de compléter, conformément à la méthode déjà exposée dans les exemples précédents,



les explications nécessaires, nous énonçons le théorème général suivant :

Théorème. — *1° Si l'on désigne par* ω_α, ω_β *deux points* ω *d'ordre* $(n-1)$, *la droite* $\omega_\alpha \omega_\beta$ *est parallèle à la droite qui joint les deux points dont les numéros ne sont pas communs aux indices* α *et* β; *de plus, elle est égale à la moitié de cette droite.*

2° Les n *points* ω *d'ordre* $(n-1)$ *sont situés sur une circonférence; le centre de cette circonférence* $\omega_{123\ldots n}$ *est le point* ω *d'ordre* n.

3° La droite qui joint le point n *au point* $\omega_{12\ldots(n-1)}$ *et les* n *droites analogues concourent en un même point* $S_{12\ldots n}$.

4° Si l'on joint le centre O, *de la circonférence donnée, au point* $S_{12\ldots n}$ *et si l'on prolonge cette droite d'une longueur moitié moindre, on a le point* $\omega_{12\ldots n}$ *lui-même.*

32. — Une étude de géométrie récurrente peut encore

se faire par un procédé différent de celui que nous avons indiqué jusqu'ici. Nous ne voulons que signaler cette voie nouvelle et un exemple nous suffira pour en montrer l'esprit.

Imaginons quatre points jetés sur un plan. Désignons ces points par A_1, B_1, C_1, D_1 ; et supposons que l'on considère en particulier le triangle $B_1 C_1 D_1$. Avec ce triangle et au moyen d'une certaine construction géométrique, on détermine un point A_2. Cette même construction, appliquée successivement aux triangles $A_1D_1C_1$, $A_1D_1B_1$, $A_1B_1C_1$, donne trois autres autres points B_2, C_2, D_2, points analogues de A_2. On obtient ainsi une figure $A_2B_2C_2D_2$, qui est déduite de la figure $A_1B_1C_1D_1$ d'après la loi proposée. On comprend alors que, de la figure $A_2B_2C_2D_2$, on peut, par la même construction, faire naître une troisième figure $A_3B_3C_3D_3$; de celle-ci une quatrième, et, en continuant indéfiniment cette suite de constructions, on obtient des figures qui se succèdent, d'après une loi géométrique, dérivent les unes des autres comme les termes d'une série, et qui jouissent, les unes par rapport aux autres, de propriétés géométriques que l'on peut rechercher.

33. — C'est encore la circonférence des neuf points qui va nous servir pour montrer un exemple de cette récurrence des figures; mais, pour plus de commodité, nous empruntons, pour la démonstration qui suit, quelques propriétés à la géométrie des coniques.

Prenons quatre points A_1, B_1, C_1, D_1 dans un plan. On sait : 1° que ces quatre points déterminent une hyperbole équilatère H ; 2° que la circonférence des neuf points du triangle $A_1B_1C_1$, par exemple, passe par le centre O de cette hyperbole; 3° que les points de concours des hauteurs des triangles $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$, etc., appartiennent à H.

On peut donc énoncer le théorème suivant, par l'énoncé duquel nous terminerons ce travail :

Théorème.— *Considérons un quadrilatère formé par quatre points* A_1,B_1,C_1,D_1 *; désignons par* A_2 *le centre des hauteurs du triangle* $B_1C_1D_1$ *et considérons le quadrilatère* $A_2B_2C_2D_2$. *En*

opérant sur celui-ci, comme sur le proposé, on obtient un nouveau quadrilatère $A_3B_3C_3D_3$ *et ainsi de suite : on arrive ainsi, après* $(n - 1)$ *constructions de ce genre, à un quadrilatère que nous désignerons par* $A_nB_nC_nD_n$ *; les circonférences des neuf points, en nombre égal à* $4n$, *qui correspondent aux triangles* $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$, *etc....* $B_nC_nD_n$, *concourent au même point.*

EXAMENS ORAUX POUR SAINT-CYR

Algèbre.

— Résoudre $1 + bx + \dfrac{x^2}{a - x} = \dfrac{a^2}{a - x}$.

— Résoudre
$$x + y = xy,$$
$$x + y = x^2 - y^2.$$

— Résoudre
$$xy + a(x + y) = p,$$
$$x^2 + y^2 + b(x + y) = q.$$

— Résoudre
$$xy = a^2,$$
$$x^2 - y^2 = b^2.$$

— Résoudre
$$x + 2(y + z) = c,$$
$$y + 2(z + x) = b,$$
$$z + 2(x + y) = a.$$

— Faire la somme
$$\frac{a}{b} + \frac{a + r}{bq} + \frac{a + 2r}{bq^2} + \frac{a + 3r}{bq^3} + \ldots + \frac{a + nr}{bq^n}.$$

— Maximum et minimum de $\dfrac{3x^2 - 5x + 3}{2x - 1}$.

— Trouver le maximum et le minimun de $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$.

— Résoudre $\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c$.

— Réduire à sa plus simple expression $\dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$

— Réduire à sa plus simple expression $\dfrac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{4x^2 - 1}$

— Résoudre $(x + 1) + \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}} = \dfrac{a}{x - 1}$.

— Résoudre
$$x^3 + y^3 = a$$
$$x + y = b.$$

— Étudier les variations de $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 4x + 3}$.

— Résoudre l'inégalité $\dfrac{ax - b}{a'x - b'} > 0$.

— Résoudre
$$x - y = a.$$
$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = b.$$

— Résoudre $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} + \dfrac{x^2}{x^2 - 9} = 1$.

— Construire $x = \dfrac{2a}{\sqrt{5} + 1}$; $x = \dfrac{a}{\sqrt{2} - 1}$;

$$x = a\sqrt{\frac{m}{n}}; \quad x = \frac{a^2\sqrt{3}}{b\sqrt{2}}; \quad x = \frac{a}{\sqrt{5}};$$

$$x = \frac{a\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}; x = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}; \quad x = a\sqrt{7}.$$

— Sachant que x' et x'' sont racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, former une équation du second degré dont les racines soient $x' + 2x''$ et $x'' + 2x'$.

— Variations de la fonction $y = \dfrac{1}{5x^2 - 2x - 3}$.

— Variations de $y = \dfrac{1}{2x - 3}$.

— Condition de réalité des racines de l'équation
$$(3\lambda + 1)x^2 - (4\lambda + 1)x + 12\lambda = 0.$$
Limites de λ pour que les racines soient plus grandes que 2.

— Résoudre et discuter
$$(m - 2)x^2 + (m - 3)x + (m - 4) = 0.$$

— Résoudre et discuter
$$(m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 2ac = 0.$$

— On donne la fonction $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$; entre quelles limites doit varier x pour que y soit réel?

— Étudier les variations de la fonction $y = x^4 - 3x^2 + 7$, x variant de $-\infty$ à $+\infty$.

— Résoudre $\dfrac{m}{1 - 2m} > 0$.

— Résoudre $x + ay = b$
$y - ax = c.$

— Étudier les variations de la fonction $y = \frac{3x}{x^2 - 7}$, x variant de $-\infty$ à $+\infty$.

— Résoudre $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 12} > 0.$

— Étant donné $mx^4 + 2x^2 + (m - 1) = 0$, quelles valeurs faut-il donner à m pour que les quatre racines soient réelles?

— Variations de la fonction $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

— On donne $y = \sqrt{x^4 - 16x^2 + 63}$. Dans quels intervalles x doit-il être compris pour que y soit réel ?

— Soit $(m - 2)x^4 - (m - 1)\ x^2 + m = 0$. Discuter, x devant être réel et positif.

— Résoudre $x^8 - 1 = 0.$

Trigonométrie.

— Résoudre $\sin x + \cos^2 x = m.$

— Résoudre $\text{tg}^2 x + \cos^2 x = m^2.$

— Résoudre $\frac{\sin^2 x}{2 - \sin^2 x} = m$. Discuter.

$\frac{2\sin^2 x}{3 - \sin^2 x} = m$. Discuter.

— Résoudre $m^2 \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$. Discuter.

— Rendre calculable par logarithmes
$\sin a + \sin 2a + \sin 3a.$

— Résoudre $m^2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$. Discuter.

— Rendre calculable par logarithmes
$\cos a + \cos b + \cos c + \cos (a + b + c).$

— Résoudre $m^2 \cos x + \sin 2x = m.$

— Résoudre $\cos x + 3\cos 2x = m.$

— Résoudre $m \cos x = \text{tg}\ x$. Discuter.

— Résoudre $\sin x = \cos 5x$

— Résoudre $\frac{\sin^2 x}{2 - m \cos x} = k$. Discuter.

— Résoudre
$$x + y = a;$$
$$\sin x \sin y = b.$$

— Résoudre $(\sin x - \cos x) \sin x = a.$

— Résoudre
$$x - y = a.$$
$$\sin^2 x - \sin^2 y = b.$$

— Vérifier $\operatorname{Tg} a + \operatorname{cotg} a = \dfrac{2}{\sin 2a}.$

— Rendre calculable par log.
$$\sin a + \sin (a + h)$$
$$+ \sin (a + 2h) + \sin (a + 3h).$$

— Vérifier $\cos 2a = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}.$

— Vérifier $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1 - \sin a}{\cos a}.$

— Que devient $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$ si x tend vers o ?

— Simplifier le produit $\dfrac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \times \dfrac{\cos a}{1 + \cos a}.$

— Que devient l'expression $\dfrac{\sin a - \sin b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$ quand a tend vers b?

— Résoudre $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x.$

— Simplifier et calculer l'expression
$$\cos a \cos (b - c)$$
$$+ \cos b \cos (c - a) + \cos c \cos (a - b).$$

Mécanique.

— Dans un plan incliné quel doit être l'angle α pour que le corps de poids P soit en équilibre, sachant qu'il est sollicité par trois forces $\dfrac{P}{3}$ tirant l'une de bas en haut, l'autre horizontalement et l'autre parallèlement au plan ?

— On donne une circonférence et un diamètre vertical AB. Trouver l'angle α que doit faire un rayon OC avec AB pour qu'un mobile partant de O arrive en C dans le même temps qu'un mobile parti de A met pour arriver en B.

— On donne une barre homogène de poids P et de lon-

gueur l, s'appuyant sur un plan horizontal AO sans frottement et contre un mur poli OK, incliné d'un angle α sur OA. On connaît l'angle β que fait la droite AB avec OK. Calculer la force Q qu'il faut faire agir horizontalement pour maintenir la barre en équilibre.

— Quatre forces sont appliquées en A et sont situées dans un même plan. AP est horizontale et vaut 8^k; AQ fait avec AP un angle de 30° et vaut 12^k; AF un angle de 60° avec AQ et vaut 10^k; AD un angle de 30° avec AF et vaut 15^k. Trouver la résultante en grandeur et en direction.

— Un mobile pesant 30^k descend le long d'un plan incliné de 45°. En un point B sa vitesse est de 4^m. La longueur AB est de 6^m. On demande au bout de combien de temps il sera en A.

— En un point O situé à l'intérieur d'un triangle ABC on applique trois forces dont les grandeurs et les directions sont OA, OB, OC. On demande de trouver leur résultante et son expression en fonction de la distance du point O au point de rencontre G des médianes. Démontrer que la résultante passe en G.

— On fait monter un corps pesant 500^k le long d'un plan incliné de 30°, à l'aide d'une corde qui s'enroule sur une poulie dont le rayon est de 20^{cm} et qui est mise en mouvement par une manivelle dont la longueur est $1^m,50$. Quelle est la force qu'il faut appliquer au bras de la manivelle pour maintenir le corps en équilibre?

QUESTION 70

Solution, par M. Aubry, élève au Lycée de Charleville.

Dans un triangle ABC, *si* h_1, h_2, h_3 *sont les trois hauteurs partant des points* A, B, C,; x, y, z *les distances du point de concours des hauteurs aux côtés* BC, AC, AB, *on a*

$$\frac{1}{h_3 z} + \frac{1}{h_2 y} = \frac{h_1 + x}{h_1 x (h_1 - x)}.$$

(E. Lemoine.)

Soient AD, BF, CK les hauteurs h_1, h_2, h_3, et H leur point de concours; on a donc

HD $= x$; HF $= y$; HK $= z$.

On a donc à démontrer l'égalité suivante

$$\frac{1}{CK\ .\ HK} + \frac{1}{BF\ .\ HF} + \frac{AD + DH}{AD\ .\ DH\ .\ AH};$$

cette égalité peut s'écrire

$$\frac{AH\ .\ HD}{CK\ .\ HK} + \frac{AH\ .\ HD}{BF\ .\ HF} = \frac{2AD - AH}{AD} = 2 - \frac{AH}{AD}.$$

Mais les quadrilatères AKDC, AFDB sont inscriptibles ; on a donc AH . HD = BH . HF = CH . HK.

On en tire $\frac{CH}{CK} + \frac{BH}{BF} + \frac{AH}{AD} = 2.$

On sait que si l'on abaisse les perpendiculaires, OP, OQ, OR sur les trois côtés, on a

$$AH = 2OP;\quad BH = 2OQ;\quad CH = 2OR;$$

donc l'égalité à démontrer devient

$$\frac{OP}{AD} + \frac{OQ}{BF} + \frac{OR}{CK} = 1;$$

cette égalité se démontre facilement, car on peut l'écrire

$$\frac{a\ .\ OP}{a\ .\ AD} + \frac{b\ .\ OQ}{b\ .\ BF} + \frac{c\ .\ OR}{c\ .\ CK} = 1$$

ce qui est évident, car chacun des dénominateurs est égal à 2S, et il en est de même de la somme des numérateurs.

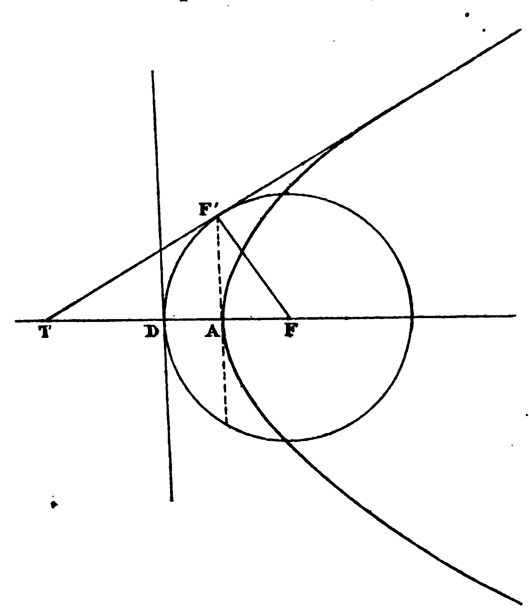
NOTA. — La même question a été résolue par M. de Kerdrel, à Kéruzoret.

QUESTION 73

Solution par M. AMAURY DE KERDREL, à Kéruzoret.

On considère une parabole P, *de foyer* F, *et de directrice* Δ. *Démontrer que les tangentes communes à* P *et au cercle décrit de* F *comme centre avec le paramètre pour rayon : 1° se coupent sur l'axe en un point symétrique de* F *par rapport à* Δ; *2° se coupent sous un angle de 60°.* (G. L.)

1° Soit T le point où la tangente rencontre l'axe, et F′ la projection du foyer sur cette tangente. On sait que cette projection tombe sur la tangente au sommet. Le triangle rectangle TFF′ donne $FF'^2 = AF \times FT$.



Donc $FT = 2p$; et par suite $TD = p = DF$. Le point T est donc le symétrique de F par rapport à Δ.

2° Dans le triangle rectangle TFF′, le côté TF est double de FF′. Donc l'angle TFF′ vaut 30°, et par suite l'angle des tangentes vaut 60°.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Desplanques, à Condé-sur-Escaut : Bablon, à Épinal; Plandé, Wateau, à Soissons; Malcor, à Paris; Gindre, à Pontarlier; Martelly, à la Flèche; Voignier, à Commercy; Vialard,

à Cluny; Bouillon, Faure, de Guiseuil, institution Sainte-Marie, à Besançon; Julien Sauve, Rougelin, Giat, à Moulin; Bordier, à Blanzac; Naura, à Vitry-le-François; J. Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg; Bourgarel, Lfaay, à Toulon; Aubry, à Charleville; Besson, à Nantes; Jung, Maiallrd, à Beauvais.

QUESTION 75

Solution par M. JEAN SLABOCHEVITSCH, élève du second corps des Cadets, à Saint-Pétersbourg.

On donne un quadrilatère inscriptible ABCD, *dont les diagonales se rencontrent en* M. *Du point* M, *on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés du quadrilatère. Les pieds de ces perpendiculaires forment un nouveau quadrilatère* $\alpha\beta\gamma\delta$. *On propose de démontrer que ce quadrilatère est circonscriptible.*

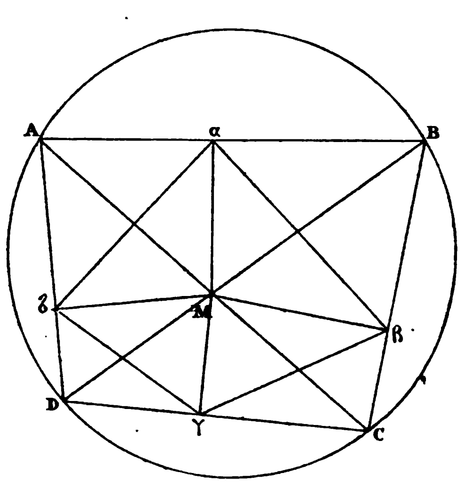
Le quadrilatère $A\alpha M\delta$ étant inscriptible, on a

$M\alpha\delta = MA\delta$;

de même le quadrilatère inscriptible $M\alpha B\beta$ donne

$M\alpha\beta = MB\beta$;

Mais les angles $MB\beta$, $MA\delta$ sont égaux, puisqu'ils sont inscrits et interceptent le même arc DC; donc $M\alpha$ est la bissectrice de l'angle $\beta\alpha\delta$; on prouverait de même que les autres bissectrices passent au point M. Donc le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, dont les bissectrices sont concourantes est circonscriptible à un cercle, ayant le point M pour centre.



NOTA. — La même question a été résolue par MM. Bablon, à Épinal; Grand, Simon, à Lons-le-Saulnier; Julien Sauve, Rougelin, Giat, à Moulins; Vialard, Berdon, à Cluny; Perrin, au lycée Charlemagne; Fauconnet, institution

Sainte-Marie, àBezançon; Bourgarel, à Toulon; Guérin, à Grandpré; de Kerdrel, à Kéruzoret; Teratte, à Évreux ; Thiélon, École Lavoisier, à Paris ; Naura, à Vitry-le-François: Bordier, à Blanzac; Aubry, à Charleville; Villademoros à Paris.

QUESTION 76

Solution par M. Vialard à Cluny.

Résoudre le système

$$x\frac{x^2+y^2-d(x+y)}{(y+x-d)(x^2+y^2)}=\frac{a}{d} \qquad (1)$$

$$y\frac{x^2+y^2-d(x+y)}{(x+y-d)(x^2+y^2)}=\frac{b}{d} \qquad (2).$$

(G. L.)

Divisons l'équation (1) par l'équation (2), nous avons

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

d'où

$$x=\frac{ay}{b}.$$

Remplaçons x par cette valeur dans l'équation (1). Nous aurons

$$\frac{\frac{ay}{b}\left[\frac{a^2y^2}{b^2}+y^2-d\left(\frac{ay}{b}+y\right)\right]}{\left(\frac{ay}{b}+y-d\right)\left(\frac{a^2y^2}{b^2}+y^2\right)}=\frac{a}{d}.$$

En divisant par y^2 haut et bas, faisant disparaître les dénominateurs, faisant passer tous les termes contenant l'inconnue dans le premier nombre, on a

$$y\left[d\left(\frac{a^2}{b^2}=1\right)-b\left(\frac{a}{b}+1\right)\right]=d\left[d\left(\frac{a}{b}+1\right)\right.$$
$$\left.-b\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\right],$$

ou

$$y=\frac{d\left[d\left(\frac{a}{b}+1\right)-b\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\right]}{d\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)-b\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\left(\frac{a}{b}+1\right)}.$$

Transformons cette valeur. Le numérateur peut s'écrire,

après l'avoir développé

$$d\left[\frac{da}{b} + d - \frac{a^2}{b} - b\right] = d\left[\frac{da + db - a^2 - b^2}{b}\right]$$

$$= -\frac{d}{b}\left[a^2 + b^2 - d(a+b)\right].$$

Le dénominateur devient

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)\left(d - b\right)\left(\frac{a}{b} + 1\right) = \left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)\left(d - a - b\right)$$

$$= -\frac{(ad^2 + b^2)}{b^2}\left(a + b + d\right)$$

et par suite

$$\frac{y}{d} = \frac{b[a^2 + b^2 - d(a+b)]}{(a + b - d)(a^2 + b^2)}$$

nous en déduisons pour x

$$\frac{x}{d} = \frac{a[a^2 + b^2 - d(a+b)]}{(a + b - d)(a^k + b^2)}$$

et nous voyons que l'on passe de l'une de ces valeurs à l'autre par la simple permutation des lettres a et x d'une part, b et y de l'autre.

Nota. — Ont résolu, MM. Simon, à Salins ; Sauve, Giat, Rougelin, à Moulins ; Bablon, à Épinal ; Desplanques, à Condé-sur-Escaut ; Bourgarel, à Toulon ; Perrin, lycée Charlemagne, à Paris ; Grand à Lons-le-Saulnier ; Berdon à Cluny ; Gindre, à Pontarlier ; Taratte, à Évreux ; de Kerdrel, à Kéruzoret ; Naura, à Vitry-le-François ; Aubry, à Charleville ; Villademoros, à Paris ; Jung, Maillard, à Beauvais ; Fauconnet, Bouillon, École Sainte-Marie, à Besançon ; Lucbicilh, à Pau ; Ménand, à Cherbourg.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE

Version latine (1 h. 1/2).

Haud multo post Nearchus et Onesicritus, post longius in Oceanum procedere jusserat, superveniunt. Nuntiabant autem quædam audita alia comperta : insulam ostio amnis subjectam auro abundare inopem equorum esse : singulos equos ab iis qui ex continenti trajicere auderent singulis talentis emi. Plenum esse belluarum mare ; æstu secundo eas fieri, magnarum navium corpora æquantes : truci cantu déter-

ritas sequi classem, cum magno æquoris strepitu, velut demersa navigia, rubisse aquas.

Thème anglais (1 h. 1/2).

Et toujours la barque s'enfuit comme l'écume emportée par la cataracte, elle fend le dos de la vague qui s'écroule en poussière sous sa quille. Elle traverse l'Océan convulsé comme si son pilote était un dieu élémentaire. La lune se lève ; à sa lueur se dessinent dans la brume les rochers éthérés du Caucase. En un clin d'œil il s'en approche. La mer fait rage à sa base caverneuse et les vagues monstres s'y brisent avec fureur. Qui sauvera la barque ? Elle est sauvée, comme une flèche elle est entrée dans la caverne avec le flot bouillonnant.

Narration (3 heures).

La princesse Rosamonde, non moins capricieuse qu'agile à la course, avait obtenu du roi son père qu'il la laissât disposer de sa main et de la couronne en faveur de l'homme qui réussirait à atteindre avant elle un but déterminé, sous peine de mort pour les prétendants malheureux. Un seul se risqua à tenter l'aventure. Il s'appelait Abibas, et il avait plus d'une raison pour ne tenir que médiocrement à la vie. Il fut agréé malgré sa mauvaise mine : la princesse se croyait assurée d'avance de la victoire. Mais Abibas avait compté sur la ruse bien plus que sur la vitesse de ses jambes. Il s'était muni d'une guirlande de roses, d'une ceinture de soie et d'un petit sac de la même étoffe dans lequel il avait enfermé une balle d'or portant cette inscription : « On ne se lasse jamais de jouer avec moi. » Après quelques alternatives de succès et de revers, il finit par remporter la victoire sur sa rivale. On dira de quels secours lui furent dans ces diverses péripéties les objets dont il s'était muni.

Dessin (1 h. 1/2).

Tête de femme.

Épure (3 heures avec le dessin linéaire).

On a un point A situé dans le second dièdre, distant de 4 centimètres du plan horizontal, et de 3 centimètres du plan

vertical. Mener par ce point une droite faisant avec le plan horizontal un angle de 35° et avec le plan vertical un angle de 41°. Parmi les droites qui satisfont au problème, considérer seulement celle qui a la trace verticale la plus éloignée du plan horizontal et située sur la gauche du plan de profil contenant A. Déterminer la plus courte distance de cette droite et de la ligne de terre.

Trigonométrie (trigonométrie, physique et chimie 4 heures).

Dans le triangle rectiligne ABC on donne :

$$\left.\begin{array}{l} B = 4864,25 \\ C = 2147,73 \\ A = 27^\circ 47' 56'' \end{array}\right\}$$ Calculer A, B, C, et le rayon du cercle circonscrit R.

Physique.

1° Définition de la chaleur spécifique; méthode des mélanges;

2° Un vase cylindrique circulaire est fermé par un piston AB dont le rayon R = 0,55. Il contient un gaz à la pression de 760 m/m et à 10°.

On porte la température du gaz à 200°. Quel poids faut-il placer sur le piston pour que le volume reste invariable. On néglige le poids du piston, la dilatation de l'enveloppe et on suppose que la pression extérieure est constamment égale à 760 mm. Le coefficient de dilatation du gaz est 0,0037. La densité du mercure 13,6.

Chimie.

Acide carbonique.

Arithmétique (arithmétique et algèbre 3 heures).

Faire voir que la fraction décimale périodique mixte

0,57864864864 . . . . .

est équivalente à la fraction ordinaire

5786486486 — 5786.

Algèbre.

Étant donné un tétraèdre régulier SABC, de côté *a*, on le coupe par un plan parallèle à la base. On prend la section

abc pour base d'une pyramide dont le sommet *o* est au centre de gravité du triangle de base du tétraèdre. — Comment doit-on mener le plan sécant pour que la pyramide ait un volume maximum? Déterminer en fonction de *a* l'expression de la surface totale de cette pyramide de volume maximum.

Géométrie (géométrie et statique 3 heures).

1° Deux polyèdres symétriques sont équivalents. Ordre et démonstration succincte des propositions qui servent à établir ce théorème.

2° On donne un cercle de rayon $OC = R$ et 2 points A et B sur le rayon OC tels que

$$OA.OB = R^2$$

Démontrer que le rapport des distances d'un point quelconque M aux 2 points A et B est égal à $\frac{OA}{R}$ lorsque le point M est sur la circonférence, est plus petit que $\frac{OA}{R}$ lorsque M est à l'intérieur du cercle et plus grand que $\frac{OA}{R}$ lorsque M est à l'extérieur.

Statique.

Un cercle matériel de rayon R peut tourner librement autour de son centre O et 3 points ABC sont donnés sur sa circonférence. En A et B sont appliquées 2 forces F_1, F_2 données en grandeurs et en directions. On demande d'appliquer en C une force F_3 telle que le cercle reste en équilibre sous l'action des 3 forces F_1, F_2, F_3, le point O étant fixé invariablement.

Montrer que le problème admet une infinité de solutions. Trouver en grandeur et direction la plus petite force F_3 qui réponde à la question.

SUR LA FORMATION DE CERTAINS TABLEAUX

Par M. **Désiré André.**

I. — Problème direct.

1. — *Étant donnés des objets différents en nombre quelconque, est-il possible d'en former un tableau d'un certain nombre de colonnes, où chaque objet n'entre jamais plus d'une fois dans une même colonne, mais puisse entrer dans plusieurs, et où chaque objet soit complètement déterminé dès qu'on connaît les colonnes où il entre?*

Quel que soit le nombre des objets donnés, si le nombre des colonnes est assez grand, ce problème est possible. C'est ce que nous allons démontrer par des raisonnements très simples, fondés sur la considération de la *numération binaire*.

2. — Supposons que, par un procédé quelconque, on ait construit un tableau satisfaisant aux conditions énoncées. Considérons-y l'un des objets donnés, et, parcourant le tableau de gauche à droite, examinons chaque colonne, pour voir si cet objet y figure ou n'y figure pas.

Si nous convenons, en marchant ainsi de gauche à droite, d'écrire un chiffre 1 pour chaque colonne où notre objet figure, et un chiffre 0 pour chaque colonne où il ne figure pas, nous voyons que nous faisons correspondre à notre objet une suite de chiffres 1 et de chiffres 0, dont le nombre total est égal au nombre des colonnes du tableau. Il y a autant de ces suites qu'il y a d'objets. Pour que les objets soient déterminés comme on le demande, il faut et il suffit que ces suites soient toutes différentes.

3. — Il est facile de les rendre telles. Considérons, en effet, l'une quelconque de ces suites. Formée uniquement de chiffres 0 et de chiffres 1, elle représente, quelle qu'elle soit, un certain nombre, écrit dans le système de numération

dont la base est 2. Il suffit donc que les nombres ainsi représentés soient tous différents; et, par conséquent, que les objets considérés correspondent à des nombres tous différents.

Or, dans le système de numération dont la base est 2, on peut écrire tous les nombres qu'on veut, pourvu qu'on y emploie un nombre suffisant de chiffres. Donc, si grand que soit le nombre des objets donnés, on en pourra former un tableau satisfaisant aux conditions énoncées, pourvu qu'on mette, dans ce tableau, un nombre de colonnes suffisant.

Dans la numération binaire, le plus grand nombre de c chiffres est égal à $2^c - 1$. Donc, en donnant c chiffres, au plus, à chaque nombre, on peut, dans ce système de numération, écrire tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 2^c exclusivement. Donc, pour qu'on puisse distribuer n objets différents en un tableau de c colonnes, il faudra et il suffira que l'on ait

$$n < 2^c,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$c > \frac{\log n}{\log 2}.$$

4. — Supposons que le nombre n des objets donnés et le nombre c des colonnes du tableau satisfassent à ces inégalités. On pourra former le tableau demandé par un procédé très simple, qui découle tout naturellement de ce qui précède, et qui peut être formulé de la manière suivante :

On placera d'abord les n *objets donnés dans un ordre arbitraire, où on leur assignera les numéros* 1, 2, 3, ..., n;

On écrira ensuite ces n *numéros ou nombres dans le système de numération dont la base est* 2;

On placera enfin chacun des objets donnés dans toutes les colonnes auxquelles, sur son numéro ainsi écrit, correspondent des chiffres 1.

II. — Exemples.

5. — Pour donner un premier exemple, supposons que nous veuillons former un tableau remplissant les conditions énoncées, en prenant pour objets distincts les trente et un

premiers nombres entiers. Puisque 31 n'est autre chose que $2^5 - 1$, il suffira d'y employer cinq colonnes. Nous n'avons, pour former ce tableau de cinq colonnes, qu'à appliquer successivement les trois parties de la règle formulée ci-dessus (4).

Évidemment les trente et un premiers nombres entiers peuvent être regardés comme se servant de numéros à eux-mêmes. La première partie de la règle est donc tout de suite appliquée.

Pour appliquer la seconde, nous n'avons qu'à écrire les trente et un premiers nombres entiers dans le système de numération dont la base est 2, opération qui ne présente aucune difficulté,

Enfin, il nous faut écrire chacun des nombres donnés dans toutes les colonnes où il doit figurer. Soit, par exemple, le nombre 14. Dans la numération binaire, 14 s'écrit 1110, ou bien, pour lui donner autant de chiffres qu'il y a de colonnes, 01110. Appliquant littéralement la troisième partie de notre règle, nous n'écrirons pas 14 dans la première colonne; nous l'écrirons dans la deuxième, dans la troisième et dans la quatrième; nous ne l'écrirons pas dans la cinquième. Opérant de la même façon pour chacun des trente autres nombres donnés, nous formerons le tableau ci-dessous, qui satisfait à toutes les conditions que nous avons énoncées en commençant.

16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25

29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31

6. — Pour donner un second exemple, supposons que nous veuillons former un tableau en prenant pour objets distincts les lettres de l'alphabet français, lesquelles, si l'on y compte le W, sont au nombre de 26. Comme 26 est compris entre 16 et 32, c'est-à-dire entre 2^4 et 2^5, il nous faudra donner encore cinq colonnes à notre tableau.

Cela étant, nous donnerons aux différentes lettres les numéros que leur assignent leurs places dans l'alphabet; nous écrirons ces 26 numéros ou nombres dans le système de la numération binaire; enfin, nous placerons chaque lettre dans toutes les colonnes indiquées par son numéro. Nous obtiendrons finalement le tableau que voici :

P	H	D	B	A
Q	I	E	C	C
R	J	F	F	E
S	K	G	G	G
T	L	L	J	I
U	M	M	K	K
V	N	N	N	M
W	O	O	O	O
X	X	T	R	Q
Y	Y	U	S	S
Z	Z	V	V	U
		W	W	W
			Z	Y

7. — Le premier des tableaux précédents, celui qui est relatif aux 31 premiers nombres, est un tableau bien connu: il figure, sous le nom d'*éventail magique*, dans les *Récréations mathématiques* de M. Édouard Lucas. Quant au second, c'est-à-dire à celui des 26 lettres de notre alphabet, il est tout à fait analogue au tableau que présente une machine ingénieuse, nommée *occultographe*, que l'on montrait, il y a quelque temps, au théâtre Robert-Houdin.

Il serait facile de former beaucoup d'autres tableaux. On

pourrait prendre pour objets les noms de nos 32 anciennes provinces, ou ceux de nos 86 départements, ou ceux des villes de France qui ont plus de 10000 habitants, ou les noms de baptême les plus répandus, etc., etc.

Dans chaque cas, on déterminerait d'abord le nombre des colonnes du tableau d'après celui des objets donnés. On formerait ensuite le tableau lui-même, en appliquant successivement, d'une façon littérale, les trois parties de la règle que nous avons formulée plus haut (1). *(A suivre.)*

QUESTIONS PROPOSÉES

92. — Déterminer les côtés d'un triangle connaissant a, et sachant que a, b, c et h_a, sont en progression géométrique (h_a est la hauteur abaissée sur a). *(A. M.)*

93. — Construire un angle ABC, connaissant la différence des angles B et C, et les portions de la bissectrice intérieure de l'angle A, et de la bissectrice extérieure du même angle, comprises entre les hauteurs partant de B et de C.

(Lemoine.)

94. — Soit un triangle ABC ; désignons par A', B', C', les points de contact du cercle inscrit Δ avec les côtés de ce triangle. On sait que les droites AA', BB', CC' sont concourantes. Soit ω le point de concours ; prenons ce que nous nommons le point ω' réciproque de ω *(Ce point est défini de la manière suivante : On prend* A″ *symétrique de* A' *par rapport au milieu de* BC ; *de même pour* B″ *et* C″ ; ω' *est le point de concours de* AA″, BB″, CC″.*)* On propose de démontrer que le point ω', le centre de gravité G du triangle ABC, et le centre O de Δ sont trois points en ligne droite. On demande la valeur du rapport $\dfrac{G\omega'}{GO}$ *(G. L.)*

95. — De chaque sommet A, B, C d'un triangle comme centre, on décrit des cercles de rayon ρ_1, ρ_2, ρ_3, tels que l'on

ait $$\frac{\rho_2 + \rho_3}{a} = \frac{\rho_1 + \rho_3}{b} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{c},$$

a, b, c étant les côtés du triangle. Lieu des centres radicaux de ces circonférences. *(Lemoine.)*

ERRATUM

Dans l'énoncé de la question 88, il s'est glissé un certain nombre d'erreurs, que nous signalons ici :

Au lieu de $xn =$, il faut $x_n =$.

Dans le cinquième alinéa, au lieu de $x_{39} = 4225$, il faut $x_{39} = 4225$.

La remarque contient les erreurs suivantes : Au lieu de : la deuxième et la troisième *proportions*, il faut :

La deuxième et la troisième *propositions*.

Au lieu de $6n + 1$, il faut $6m + 1$.

Au lieu de : Aucun nombre premier de la forme $6m - 1$ ne peut diviser *la série*, il faut : ne peut diviser *un terme de la série*.

A la fin, au lieu de : servent à justifier les *principes* ci-dessus, il faut : les *énoncés* ci-dessus.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12016-3.

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

Par M. **G. de Longchamps.**

Le théorème dont nous voulons parler peut être énoncé dans la forme suivante :

Théorème (1). — *Le double d'un carré, augmenté de l'unité, peut, d'une infinité de façons, être un carré; mais il n'est jamais égal à un bicarré.*

1. — Considérons d'abord l'équation indéterminée

$$2x^2 + 1 = y^2 ;$$

nous voulons montrer qu'elle admet une infinité de solutions entières.

On voit immédiatement qu'elle est vérifiée en supposant

$$x = 2, \qquad y = 3.$$

Dans une note que nous avons publiée dans ce journal, nous avons montré que l'équation

$$qx^2 + py^2 = 1$$

ne pouvait admettre une solution entière, sans être, par cela même, vérifiée par une infinité de valeurs entières d'x et d'y. En désignant par $x_0 = \theta'$, $y_0 = \theta$ une solution entière et particulière de cette équation, nous avons démontré et l'on vérifie sans difficulté que les nombres x_1, y_1,

$$\pm x_1 = \theta'(q\theta'^2 - 3p\theta^2)$$
$$\pm y_1 = \theta(3q\theta'^2 - p\theta^2)$$

représentent une nouvelle solution de l'équation proposée.

Par exemple, pour le cas particulier qui nous occupe, on passe d'une solution x_p, y_p à une autre solution x_{p+1}, y_{p+1},

(1) Cette propriété des nombres n'est pas nouvelle, du moins selon toute vraisemblance. La première partie est certainement connue, puisque Euler et Lagrange, après Fermat, ont donné la résolution complète de l'équation indéterminée du second degré; quant à la seconde partie, elle ressort des équations $Ax^4 + By^4 + Cz^2 = 0$ qui ne sont pas, croyons-nous, complètement résolues. Dans tous les cas, la démonstration que nous proposons est élémentaire et sa lecture pourra intéresser nos jeunes lecteurs.

au moyen des formules suivantes :

$$\pm x_{p+1} = x_p (2x_p^2 + 3y_p^2)$$
$$\pm y_{p+1} = y_p (6x_p^2 + y_p^2).$$

En appliquant ces formules aux valeurs suivantes

$$x_0 = 2, \qquad y_0 = 3,$$

on a $x_1 = 70, \quad y_1 = 99;$

puis $x_2 = 2744210 \quad y_2 = 3880899$, etc...

2. — Proposons-nous maintenant de démontrer que l'équation indéterminée

$$2x^2 + 1 = y^4 \qquad (1)$$

ne peut être vérifiée par des solutions entières.

Le nombre inconnu y est nécessairement impair; posons donc

$$y = 2t + 1,$$

t désignant un nombre entier. L'équation qui va nous occuper est alors $2x^2 + 1 = (2t + 1)^4$

ou, après simplifications,

$$x^2 = 4t(2t^3 + 4t^2 + 3t + 1).$$

Le polynôme placé dans la parenthèse est divisible par $t + 1$, et l'on trouve, en effectuant cette division,

$$x^2 = 4t(t + 1)(2t^2 + 2t + 1).$$

Cette égalité peut encore être écrite sous la forme suivante : $x^2 = 4t(t + 1)[t^2 + (t + 1)^2]$. (2)

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que t est, ou n'est pas, un carré parfait.

1° Supposons d'abord que t ne soit pas un carré parfait, et soit λ un facteur premier de t, facteur ayant un exposant impair. Ce nombre λ doit diviser le produit

$$(t + 1)[t^2 + (t + 1)^2].$$

Mais, pour des raisons connues, il ne peut appartenir à $t + 1$; par conséquent λ devrait diviser

$$t^2 + (t + 1)^2.$$

Or il divise t; il devrait donc diviser $(t + 1)^2$, et par suite $t + 1$; ce qui est impossible.

2° Supposons maintenant que t soit un carré parfait. Dans ce cas, $t + 1$ n'est pas un carré parfait, et en répétant sur $t + 1$ le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure sur t, on reconnaît l'impossibilité de résoudre, en nombres

entiers, l'équation (2) et, par conséquent, l'équation proposée (1).

CONCOURS DE L'ÉCOLE SAINT-CYR (1883)

Mathématiques.

1. — *Une sphère de rayon* r *est placée sur un plan ; un cône dont le rayon de base est* R *et la hauteur* 2r *repose sur ce même plan. A quelle distance* x *du plan donné faut-il lui mener un plan parallèle, pour que les volumes compris entre les deux plans dans ces deux solides soient équivalents ? — Discuter. — Examiner la position du plan sécant par rapport au centre de la sphère.*

Le volume du segment sphérique à une base, qui a pour hauteur x, a pour expression

$$\frac{1}{3}\pi x^2(3r - x).$$

Le volume du tronc de cône, dont les rayons de base sont R et y, et la hauteur x, a pour expression

$$\frac{1}{3}\pi x(R^2 + y^2 + Ry);$$

on a en outre, entre x et y, la relation

$$\frac{y}{R} = \frac{2r - x}{2r};$$

on en tire pour l'expression du volume en fonction des seules données et de x

$$\frac{1}{3}\pi R^2 x\,\frac{12r^2 - 6rx + x^2}{4r^2}.$$

L'équation du problème est donc, en supprimant le facteur constant $\frac{1}{3}\pi$

$$4r^2x^2(3r - x) = R^2x(x^2 - 6rx + 12r^2).$$

On a d'abord la solution $x = 0$, qui ne convient pas à la question, puisque alors les deux volumes sont simultané-

ment nuls; puis il reste l'équation du second degré

$$x^2(R^2 + 4r^2) - 6rx(R^2 + 2r^2) + 12R^2r^2 = 0. \quad (1)$$

Pour que le problème soit possible il faut que x soit réel, positif et moindre que $2r$. La condition de réalité des racines est $9r^2(R^2 + 2r^2)^2 - 12R^2r^2(R^2 + 4r^2) \geq 0$
ou, en supprimant le facteur positif $3r^2$ et effectuant les calculs,

$$-R^4 - 4R^2r^2 + 12r^4 \geq 0. \quad (2)$$

En posant $\frac{R}{r} = m$, on trouve que m^2 doit être compris entre les racines de l'équation

$$m^4 + 4m^2 - 12 = 0;$$

comme de plus m^2 doit être positif, de même que m, on trouve entre les rayons R et r la relation

$$R < r\sqrt{2}. \quad (3)$$

Lorsque les racines sont réelles, elles sont positives, car leur somme et leur produit sont positifs.

La demi-somme des racines est

$$3r. \frac{2r^2 + R^2}{4r^2 + R^2};$$

l'expression fractionnaire est plus petite que l'unité, elle augmente donc avec R^2, et comme la plus grande valeur de R^2 est $2r^2$, la demi-somme des racines est moindre que $2r$; donc la plus petite racine au moins est acceptable.

Pour savoir si les deux racines sont acceptables, nous allons substituer $2r$ à x dans le premier membre de l'équation. Nous trouvons pour le premier membre

$$4r^2(R^2 + 4r^2) - 12r^2(R^2 + 2r^2) + 12R^2r^2;$$

nous avons, après réduction,

$$(R^2 - 2r^2)4r^2.$$

Or, le premier facteur est négatif si les racines sont inégales; il est nul si les racines sont égales. Donc, en exceptant ce cas limite, nous voyons que la plus grande racine est supérieure à $2r$; elle n'est donc pas acceptable.

Enfin, pour savoir comment est placé le plan par rapport au centre, nous cherchons le signe que prend le premier membre quand on y remplace x par r. Nous trouvons

$$r^2(7R^2 - 8r^2).$$

Ce résultat est de même signe $7R^2 - 8r^2$.

Donc, tant que l'on a $7R^2 < 8r^2$, la solution trouvée pour x est inférieure à r, et par suite les deux plans sont du même côté du centre. Si l'on a $7R^2 - 8r^2 = 0$, le plan passe par le centre ; enfin, dans le cas où $7R^2$ est plus grand que $8r^2$, le plan sécant est au-dessus du centre.

2. — *On donne un demi-cercle* AOB, *et la tangente* AC *à l'extrémité* A *du diamètre* AB. *Trouver sur la demi-circonférence un point* M *tel que, en abaissant une perpendiculaire* MC *sur la tangente* AC, *et joignant* MB, *on ait*

$$MB + 2MC = l.$$

Discuter.

Du point M, j'abaisse la perpendiculaire MP sur le diamètre AB, puis je prends pour inconnue l'angle ABM, que j'appelle φ. J'ai évidemment

$$MB = 2R\cos\varphi$$
$$AP = MC = 2R(1 - \cos^2\varphi).$$

L'équation du problème est donc

$$2R\cos\varphi + 4R(1 - \cos^2\varphi) = l,$$

ou $$4R\cos^2\varphi - 2R\cos\varphi + l - 4R = 0.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que le cosinus soit positif et plus petit que 1, parce que l'angle φ est nécessairement aigu. Or, il est facile de voir que le nombre 1 est en dehors de l'intervalle compris entre les deux racines ; en effet, si je remplace $\cos\varphi$ par 1, il vient, après réduction, $l - 2R$.

Or, il est certain que cette quantité est positive ; car on a

$$MB + MC > BP + PA$$

et à plus forte raison

$$MB + 2MC > 2R.$$

Si l'on a $$l - 4R < 0,$$

on a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative, et d'après ce que nous venons de dire, la racine positive, seule acceptable, est moindre que 1 ; le problème a donc dans ce cas une solution, et une seule.

Si l'on a $$l - 4R > 0,$$

les deux racines, si elles sont réelles, sont positives, puisque leur somme est positive ainsi que leur produit. Pour qu'elles

soient réelles, il faut que l'on ait

$$17R^2 - 4Rl > 0,$$

ce qui donne $$l < \frac{17R}{4}.$$

Alors, comme la demi-somme des racines est $\frac{1}{4}$, les deux racines sont inférieures à l'unité. Le problème a donc deux solutions.

Cherchons comment sont placés les deux points M_1 et M_2 par rapport au rayon OD perpendiculaire à AB. Si le point M était au point D, sur le rayon OD, on aurait

$$\cos DBA = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

or, si l'on substitue cette valeur on trouve

$$l - R(2 + \sqrt{2}).$$

Par suite, comme dans notre hypothèse on a

$$l > 4R,$$

ce résultat est positif; il est facile d'en conclure que les deux points M_1 et M_2 sont sur le quadrant BD.

Résumons la discussion :

Si l'on a $$l < R(2 + \sqrt{2}),$$
il y a une solution sur le quadrant DA;

Quand on a $$l = R(2 + \sqrt{2}),$$
le point M est en D.

Pour $$R(2 + \sqrt{2}) < l < 4R,$$
une seule solution sur le quadrant DB, entre D et le point H, sommet du demi-hexagone inscrit.

Quand $l = 4R$, on a deux points, l'un en H, l'autre en B.

Enfin, quand $4R < l < \frac{17R}{4}$, on a deux solutions, toutes les deux entre B et H. Ces deux solutions se réduisent à une seule quand $l = \frac{17R}{4}$.

3. — *Trouver toutes les valeurs de* x *qui satisfont à l'équation*

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c.$$

On fera

$$a = 1,576824; \quad b = 2,765483; \quad c = 4,897431.$$

On sait que, en chassant les dénominateurs, on a l'équation

$$c \sin 2x - (b - a) \cos 2x = b + a.$$

On pose

$$\frac{b-a}{c} = \operatorname{tg} \varphi ;$$

il vient

$$\sin (2x - \varphi) = \frac{b+a}{c} \cos \varphi.$$

Cette expression étant calculable par logarithmes, soit α le plus petit angle répondant à la question ; on en tire

$$2x - \varphi = 2K\pi + \alpha$$

ou

$$2x - \varphi = 2K\pi + \pi - \alpha.$$

Donc

$$x = K\pi + \frac{\alpha + \varphi}{2}, \text{ ou } x = K\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha - \varphi}{2}.$$

Appliquons à l'exemple considéré :

$$b + a = 4{,}342307 \qquad \log (b + a) = 0{,}6378205$$
$$b - a = 1{,}188659 \qquad \log (b - a) = 0{,}0750576$$
$$c = 4{,}897431 \qquad \log c = 0{,}6899594$$

d'où

$$\varphi = 13^\circ\, 38'\, 34''$$

puis

$$\alpha = 59^\circ\, 31'\, 29''5.$$

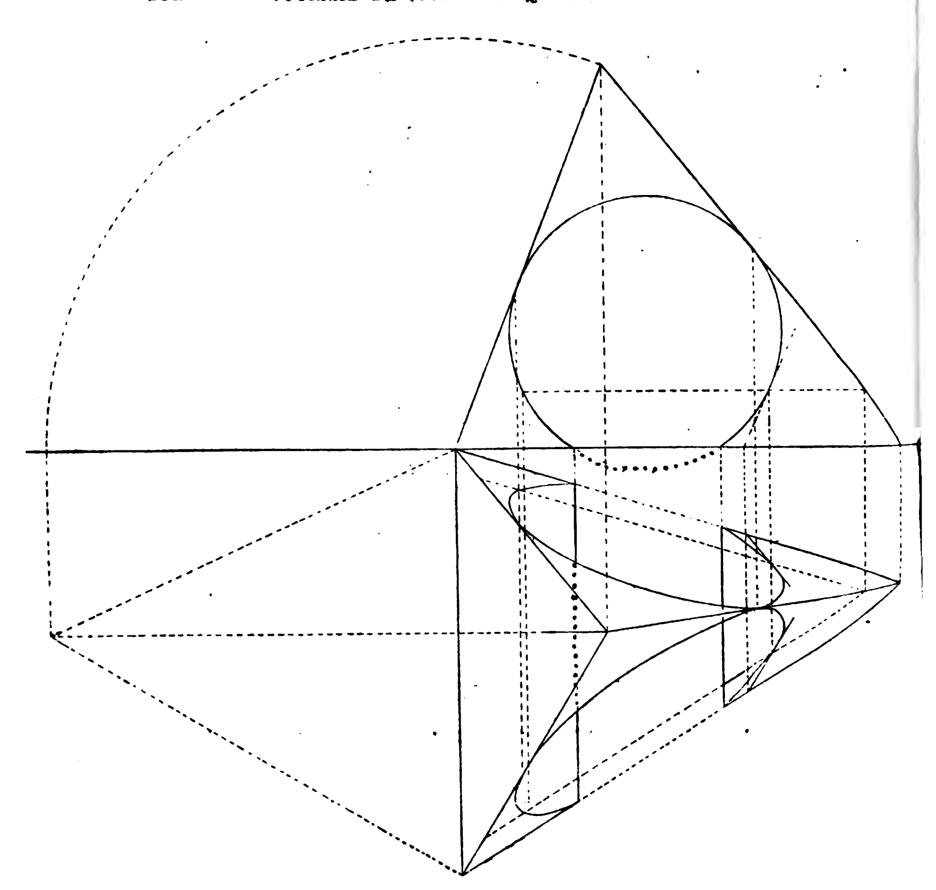
Épure.

Construire la pyramide triangulaire SABC dont la base ABC est appliquée sur la partie antérieure du plan horizontal. Le dièdre AB vaut 69° ; le sommet B est sur la ligne de terre xy, et l'arête AB est perpendiculaire à xy. On donne en millimètres

AB = 111 ; BC = 125 ; AC = 141 ; SB = 118 ; SA = 126.

Un cercle situé sur le plan vertical dans l'angle $Bs'c'$ est tangent aux deux côtés de cet angle, et a pour rayon 36 millimètres. Ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan vertical. Construire l'intersection de ce cylindre avec la pyramide. On indiquera les tracés effectués pour obtenir un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Dans la mise à l'encre, on représentera la pyramide supposée pleine et existant seule, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le cylindre.



NOTA. — *Cette épure ne présentant aucune difficulté, nous nous contentons de reproduire l'épure faite, sans autre explication.*

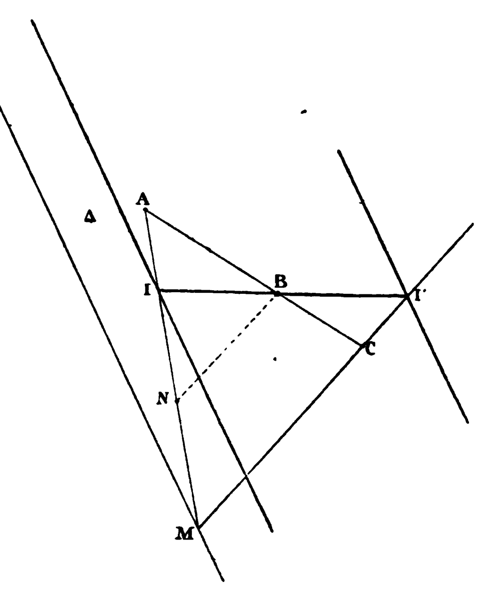
QUESTION 74

Solution par M. VILLADÉMOROS, élève du pensionnat des Frères Maristes, à Paris-Plaisance.

On donne une droite Δ, *et trois points* A, B, C *en ligne droite; soit* M *un point quelconque de* Δ ; *par le point* B, *on mène une droite qui rencontre* MA *au point* I, *et* MC *au point*

I′; on suppose d'ailleurs que BI = BI′. *Trouver le lieu du point* I′ *et celui du point* I.

Supposons que nous ayons les droites AM et CM. Pour déterminer le point I, il faut mener par B une parallèle à CM, qui rencontre AM au point N, puis prendre IN = NM. On a ainsi IBI′ de telle manière que BI = BI′.



D'après la construction faite, on voit que

$$\frac{IM}{AI} = \frac{2BC}{AI} = \frac{AB - BC}{2BC} = \text{constante}.$$

Le lieu du point I est donc une droite parallèle à Δ. Il en est de même du lieu du point I′.

Au lieu d'avoir BI = BI′ on pouvait avoir $\frac{BI}{BI'} = n$. Le lieu se compose encore de deux droites.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Rougelin, Julien Sauve, à Moulin; Rat, à Marseille; Gindre, à Pontarlier; Taratte, au lycée Saint-Louis, à Paris; Lucbieilh, à Pau; Bablon, à Épinal; Vialard, Berdon, à Cluny; P. La Chesnais, lycée Henri IV, à Paris; Aubry, à Charleville; de Kerdrel, à Kéruzoret; J. Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg.

QUESTION 78

Solution par M. Giboudot, élève à Sainte-Barbe.

Trouver les côtés d'un triangle, connaissant une hauteur, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

Soient h la hauteur, r le rayon du cercle inscrit, R celui du cercle circonscrit.

On a immédiatement, en vertu de théorèmes connus,

$$xy = 2Rh. \qquad (1)$$

$$r(x + y + z) = zh. \qquad (2)$$

D'ailleurs on a

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2z.HC$$

et comme $\quad HC = \sqrt{y^2 - h^2}$

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2z\sqrt{y^2 - h^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$x^2 - y^2 - z^2 = -2z\sqrt{y^2 - h^2}$$

et en élevant les deux membres au carré

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = 4z^2y^2 - 4z^2h^2.$$

Ordonnant cette équation par rapport à z, il vient

$$z^4 - 2z^2(x^2 + y^2 - 2h^2) + (x^2 - y^2)^2 = 0. \qquad (3)$$

Or l'équation (2) donne :

$$r(x + y) = z(h - r)$$

d'où

$$z = \frac{r(x + y)}{h - r}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (3) celle-ci devient :

$$\frac{r^4(x + y)^4}{(h - r)^4} - \frac{2r^2(x + y)^2}{(h - r)^2}\left[x^2 + y^2 - 2h^2\right] + \left(x^2 - y^2\right)^2 = 0.$$

On réduit au même dénominateur et on a

$$r^4(x + y)^4 - 2r^2(x + y)^2(h - r)^2[x^2 + y^2 - 2h^2] - (x^2 - y^2)^2(h - r)^4 = 0$$

et, en divisant tout par $(x + y)^2$,

$$r^4(x + y)^2 - 2r^2(h - r)^2(x^2 - y^2 - 2h^2) + (x - y)^2(h - r) = 0.$$

Si l'on remarque que $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$,

que $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$,

et que l'on a dans l'hypothèse $2xy = 4Rh$, l'expression précédente peut s'écrire

$$(x^2 + y^2)r^4 + 4Rhr^4 - 2r^2(h - r)^2(x^2 + y^2) + 4r^2h^2(h - r)^2 + (h - r)^4(x^2 + y^2) - 4Rh(h - r)^4 = 0,$$

et, en ordonnant par rapport à $(x^2 + y^2)$,

$$(x^2 + y^2)[r^4 - 2r^2(h - r)^2 + (h - r)^4] = 4Rh(h - r)^4 - 4Rhr^4 - 4h^2r^2(h - r)^2;$$

or le coefficient de $(x^2 + y^2)$ est le carré de $[r^2 - (h - r)^2]$, c'est-à-dire de $h(h - 2r)$.

Par suite on a

$$x^2 + y^2 = \frac{4Rh[(h - r)^4 - r^4] - 4h^2r^2(h - r)^2}{h^2(h - 2r)^2}.$$

Mais le premier terme du numérateur devient visiblement

$$4Rh^2(h - 2r)[(h - r)^2 + r^2].$$

Par suite, comme $2xy = 4Rh$, on a

$$(x+y)^2 = \frac{4Rh(h-2r)[h^2+r^2-2hr+r^2+h^2-2rh]-4hr^2(h-r)^2}{h(h - 2r)^2}$$

$$(x + y)^2 = \frac{8R(h - 2r)(h - r)^2 - 4r^2(h - r)^2}{(h - 2r)^2}.$$

$$= \frac{4(h - r)^2[2R(h - 2r) - r^2]}{(h - 2r)^2}$$

On en tire $(x + y)$, et comme on connaît $xy = 2Rh$, on détermine facilement x et y.

z est donné par la relation

$$z = \frac{r(x + y)}{h - r} = \frac{2r}{h - 2r}\sqrt{2R(h - 2r) - r^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait évidemment $h > 2r$

et aussi $2R(h - 2r) > r^2$

ou $R > \dfrac{r^2}{2(h - 2r)}$.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Giat, à Moulins; de Kerdrel, à Kéruzoret; Voignier, à Commercy.

QUESTION 80

Solution par M. NAURA, au collège de Vitry-le-François.

Étant données les équations

$$\cos x + \cos y = 2\rho \cos \alpha, \qquad (1)$$
$$\sin x + \sin y = 2\rho \sin \alpha \qquad (2)$$

trouver l'équation qui admet pour racines

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x \quad \textit{et} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} y.$$

Divisons (2) par (1) on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2}}.$$

Représentons $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2}$ par s et $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2}$ par p,

on a
$$\frac{s}{1-p} = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (3)$$

Dans l'équation (1) remplaçons $\cos x$ et $\cos y$ par leurs valeurs par rapport à $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ et à $\operatorname{tg} \frac{y}{2}$:

$$2\rho \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}}$$
$$= \frac{2\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}\right)}.$$

On a donc
$$\frac{1 - p^2}{(1-p)^2 + s^2} = \rho \cos \alpha. \qquad (4)$$

De (3) on déduit $\quad s^2 = (1-p)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$

Remplaçons s^2 par sa valeur dans (4):

$$\frac{1+p}{1-p} = \frac{\rho}{\cos\alpha};$$

d'où $$p = \frac{\rho - \cos\alpha}{\rho + \cos\alpha}.$$

Remplaçons p par sa valeur dans l'équation (3); on a

$$s = \frac{2\sin\alpha}{\rho + \cos\alpha}.$$

On connaît la somme s et le produit p des deux quantités $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$. Ces quantités sont donc les racines de l'équation du deuxième degré,

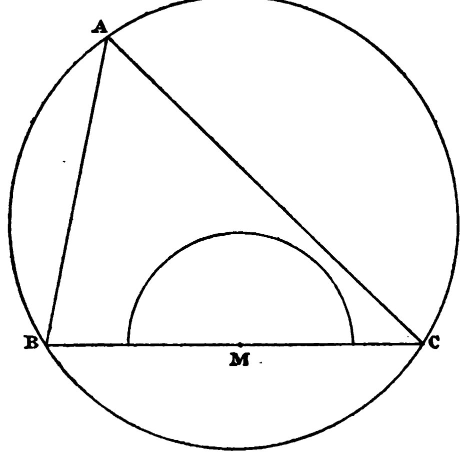
$$(\rho + \cos\alpha)u^2 - 2\sin\alpha \cdot u + \rho - \cos\alpha = 0.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Maillard, au collège de Beauvais; Aubry, à Charleville; de Kerdrel, à Kéruzoret; Lafay, Bourgarel, à Toulon.

QUESTION 81

Solution par M. Amaury de Kerdrel, à Kéruzoret.

Dans un triangle on connaît la base et l'angle au sommet; trouver le lieu du centre du cercle des neuf points.



Soit BC la base donnée et A l'angle au sommet; on peut construire le cercle circonscrit au triangle ABC en décrivant sur BC un segment capable de l'angle A. D'ailleurs le cercle des neuf points passe par le milieu M du côté BC et a un rayon moitié moindre que celui du cercle circonscrit. Or, le

cercle circonscrit étant connu, le rayon du cercle des neuf points est déterminé. Donc le lieu est un cercle décrit de M comme centre avec un rayon égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle.

Les points du lieu situés au-dessus de BC conviennent seuls à la question.

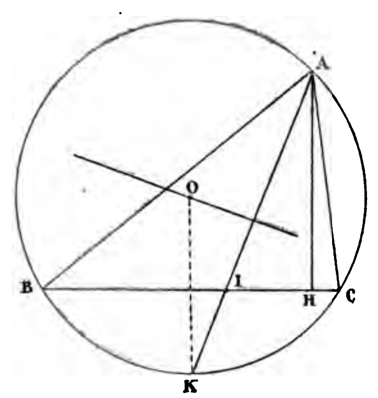
NOTA. — La même question a été résolue par MM. Naura, à Vitry-le-François; Bablon, à Épinal; Giat, à Moulins; Desplanques, à Condé-sur-Escaut; Cybardet, à Blanzac.

QUESTION 82

Solution par M. GINDRE, à Pontarlier.

Dans un triangle, on connaît la bissectrice de l'angle au sommet, le rectangle des deux côtés qui comprennent cet angle et la différence des angles à la base : on demande de construire ce triangle.

Je suppose le triangle BAC construit et je considère le cercle circonscrit au triangle, en menant la hauteur AH, je détermine un triangle rectangle AIH que je puis construire: car je connais AI et l'angle $AIH = \frac{\pi}{2} - \frac{C - B}{2}$; je connaîtrai donc exactement le rayon du cercle circonscrit, car



$$2R \cdot AH = AB \cdot AC$$

Je pourrai aussi déterminer le point K de rencontre de la bissectrice AI avec le cercle circonscrit, car

$$AI \cdot AK = AB \cdot AC.$$

Donc, pour déterminer ABC, je construirai AIH, puis je déterminerai le point K, et aussi le centre O du cercle cir-

conscrit qui se trouve à une distance déterminée de K et sur la perpendiculaire élevée au milieu de AK ; connaissant le cercle circonscrit, nous aurons les points B et C par la rencontre de IH avec ce cercle.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Gaillardon, Yvon, à Chartres ; de Kerdrel, à Kéruzoret ; Villadémoros, à Plaisance ; Bourgarel, à Toulon ; Giat, à Moulins.

QUESTION 83

Solution par M. YOUSSOUFFIAN, au collège de Galata-Seraï (Constantinople).

Trois nombres entiers sont en progression géométrique ; si le second augmente de 8, la progression devient arithmétique ; mais si, alors, le dernier terme augmente de 64, elle redevient géométrique. Trouver les trois nombres.

Soient x, y, z les trois nombres cherchés.

On a, d'après l'énoncé du problème

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z},$$

$$(y + 8) - x = z - (y + 8)$$

et

$$\frac{x}{y + 8} = \frac{y + 8}{z + 64}.$$

Équation que l'on peut mettre sous la formes

$$y^2 = xz$$

$$x - 2y + z = 16$$

$$4x = y + 4.$$

La troisième équation donne $x = \frac{y + 4}{4}$. Remplaçant x par cette valeur dans les deux premières équations, on a

$$y^2 = \frac{(y + 4)z}{4}, \quad \frac{y + 4}{4} - 2y + z = 16.$$

Éliminant z entre ces deux équations et réduisant, on a

$$9y^2 - 88y - 240 = 0,$$

dont les racines sont

$$y = 12, \quad y = -\frac{20}{9};$$

y devant être un nombre entier, on doit prendre seulement la valeur 12, ce qui donne $x = 4$ et $z = 36$.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Giat, à Moulins ; Villadémoros, à Plaisance; de Kerdrel, à Kéruzoret; Besson, à Nantes; Caitucoli, à Draguignan; Doret, à Brest; Bablon, à Épinal; Maillard, à Beauvais; Desplanques, à Condé-sur-Escaut; Marsy, à Lille; Payard, à Vitry-le-François.

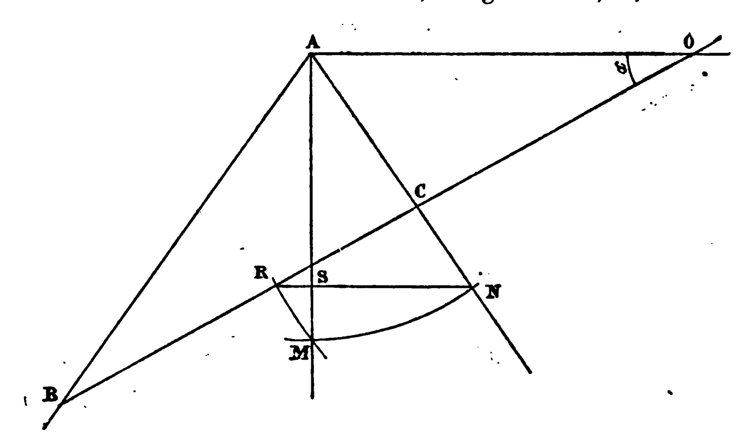
QUESTION 85

Solution par M. GIBOUDOT, élève à Sainte-Barbe.

Par un point pris sur la bissectrice d'un angle mener une droite qui forme avec les côtés de l'angle un triangle de surface donnée.

Je vais considérer deux cas, suivant que le point est sur la bissectrice extérieure ou sur la bissectrice intérieure.

PREMIER CAS. — Soient ABC $= \alpha$, l'angle donné; a, la dis-



tance du point A au point donné O, comptée sur la bissectrice extérieure, et x l'angle inconnu que fait la droite variable OB avec AO.

La surface du triangle ABC a pour expression

$$S = \frac{AB.AD.\sin\alpha}{2}.$$

L'angle α étant constant, le problème revient donc à mener la droite OB de façon que le produit des segments qu'elle détermine sur les côtés de l'angle soit égal à une quantité donnée K^2.

Pour calculer AB et AC, je remarque que les triangles AOB, AOC donnent $\dfrac{AB}{\sin x} = \dfrac{a}{\sin B}$,

et $$\frac{AC}{\sin x} = \frac{a}{\sin C};$$

d'où $$AB.AC = \frac{a^2 \sin^2 x}{\sin B \sin C} = K^2.$$

Or, il est aisé de voir que

$$\sin B \sin C = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2 x.$$

Par suite, il vient $$K^2 = \frac{a^2 \sin^2 x}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2 x};$$

d'où $$\sin^2 x = \frac{K^2 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}}{a^2 + K^2}.$$

Pour que le sinus existe il faut et il suffit que

$$K^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} \leq a^2 + K^2$$

ou $$K^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \geq - a^2,$$

condition toujours remplie. Le problème, dans ce premier cas, est donc toujours possible, comme il était du reste aisé de le prévoir.

On en déduit facilement la construction simple qui suit (*fig. 1*).

Du point A avec un rayon égal à K, je décris un arc de cercle qui coupe respectivement en M et en N la bissectrice intérieure et le côté AC. Du point N j'abaisse ensuite sur AM une perpendiculaire indéfinie NR. Enfin du point O avec OM comme rayon je décris un arc de cercle qui coupe cette perpendiculaire au point R. Je joins OR qui est la droite cherchée ; car il est aisé de voir que

$$OR = \sqrt{a^2 + K^2}$$

et que
$$AS = K \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Deuxième cas. — En conservant les mêmes notations et appelant x l'angle AOC, je dois avoir encore

$$AB.AC = K^2.$$

Les triangles AOB, AOC donnent encore

$$AB.AC = \frac{a^2 \sin^2 x}{\sin B \sin C}$$

et, dans ce cas, je remarque que

$$\sin B \sin C = \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(x - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Par suite il vient

$$K^2 = \frac{a^2 \sin^2 x}{\sin^2 x - \sin^2 \frac{\alpha}{2}};$$

d'où
$$\sin^2 x = \frac{K^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{K^2 - a^2}.$$

La condition de possibilité du problème est dans ce cas

$$K^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq K^2 - a^2$$

ou
$$K \cos \frac{\alpha}{2} \geq a.$$

J'ai alors la construction suivante (*fig.* 2).

Au point O j'élève à la bissectrice une perpendiculaire ON.

Du point A avec K comme rayon, je décris un arc de cercle qui coupe AC en M et OM en N, de telle sorte que

$$\overline{OM}^2 = K^2 - a^2.$$

Par le point M je mène une parallèle à AO jusqu'à son intersection en P, avec un arc de cercle décrit de O avec ON comme rayon. Je joins PO et je dis que PO est la ligne demandée. En effet, il est aisé de voir que

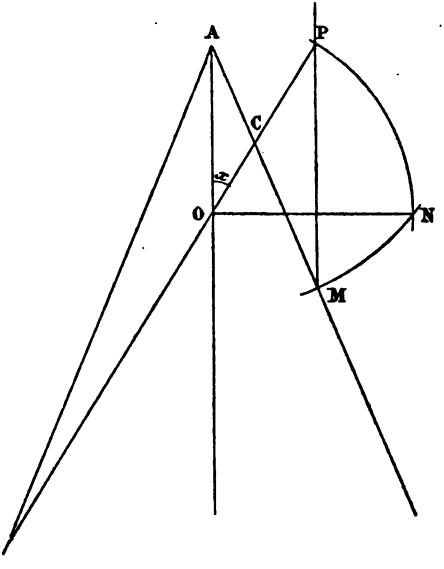
$$OS = K \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Le triangle rectangle OPS donne alors

$$\cos \text{POS} = \sin x = \frac{\text{OS}}{\text{OP}} = \frac{\text{K} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\text{R}^2 - a^2}}.$$

La condition de possibilité trouvée précédemment nous montre que le minimum de la surface du triangle a lieu pour

$$a = \text{K} \cos \frac{\alpha}{2}.$$



Dans ce cas le point K vient en O, la droite OP est perpendiculaire en ce point à la bissectrice, le triangle est isoscèle. Si OP s'incline dans un sens ou dans l'autre sur AR, le triangle devient infini lorsque OP et AB ou AC approchent du parallélisme.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Bablon, à Epinal; Naura, à Vitry-le-François; Giat, à Moulins; de Kerdrel, à Kéruzoret.

SUR LA FORMATION DE CERTAINS TABLEAUX

Par M. **Désiré André.**

(*Suite*, voir page 139.)

III. — Problème inverse.

8. — Dans la première partie de ce travail, nous nous sommes proposé de résoudre ce problème : *Former avec* n *objets un tableau de* c *colonnes satisfaisant à certaines conditions.*

L'une de ces conditions, la principale même, c'était que chacun des objets fût déterminé par la simple connaissance des colonnes où il figure. Nous sommes conduits à nous poser maintenant ce nouveau problème, qui est l'inverse du premier : *Connaissant les colonnes où figure un certain objet, trouver cet objet.*

9. — La connaissance des colonnes où l'objet en question figure équivaut évidemment à celle du nombre, écrit dans le système binaire, qui sert de numéro à cet objet. Il suffit, pour bien connaître ce numéro, de revenir de ce nombre, écrit dans le système binaire, au même nombre, écrit dans le système ordinaire de la numération décimale. Le numéro connu, l'objet correspondant est connu.

Le retour de la numération binaire à la numération décimale s'effectue d'une manière très simple. Supposons, par exemple, que le tableau formé ait cinq colonnes, ce qui est précisément le cas des deux tableaux qui précèdent. Le chiffre 1 a pour valeurs relatives : dans la première colonne, 2^4 ou 16 ; dans la deuxième, 2^3 ou 8 ; dans la troisième, 2^2 ou 4 ; dans la quatrième, 2^1 ou 2 ; dans la cinquième, 2^0 ou 1. Or, dans tout système de numération, un nombre quelconque est la somme des valeurs relatives de tous ses chiffres. Donc il suffira, pour obtenir, dans le système décimal, le numéro d'un objet quelconque, de faire la somme des puissances de 2 correspondant à toutes les colonnes où figure cet objet.

10. — Considérons le tableau (5) que nous avons formé en prenant pour objets les 31 premiers nombres entiers. Ici, le problème se simplifiera, puisque chaque objet sera identique à son numéro.

Supposons donc qu'on nous demande quel est le nombre de ce tableau qui se trouve dans la première colonne, dans la troisième et dans la quatrième. A la première colonne correspond 16 ; à la troisième, 4 ; à la quatrième, 2. Le nombre demandé est donc égal à $16 + 4 + 2$, c'est-à-dire à 22.

Supposons encore qu'on nous demande le nombre qui

figure dans la deuxième colonne et dans la cinquième. A la deuxième colonne correspond 8 et à la cinquième 1. Le nombre demandé est donc égal à 8 + 1, c'est-à-dire à 9.

Avec un peu d'exercice, on arrive à répondre à toutes les questions de cette sorte, d'une façon pour ainsi dire instantanée.

11. — Considérons maintenant le tableau (6) que nous avons formé en prenant pour objets les 26 lettres de l'alphabet français. Les numéros que nous avons attribués à ces lettres ne sont autre chose que leurs rangs dans l'alphabet.

Supposons qu'on nous demande la lettre qui figure dans la deuxième colonne, dans la troisième et dans la cinquième. A la deuxième colonne correspond 8; à la troisième, 4; à la cinquième, 1. Le numéro correspondant à la lettre cherchée est donc 8 + 4 + 1, c'est-à-dire 13. La lettre cherchée est donc la treizième lettre de notre alphabet: c'est la lettre M.

Supposons encore qu'on nous demande la lettre qui figure dans la première colonne et dans la troisième. A la première colonne correspond 16; à la troisième, 4. Donc le numéro correspondant à la lettre cherchée est 16 + 4, c'est-à-dire 20. Donc la lettre cherchée est la vingtième de notre alphabet: c'est la lettre T.

Avec un peu d'exercice, on peut arriver à répondre très vite à ces différentes questions.

12. — A l'aide du tableau formé des 26 lettres de notre alphabet, et sans même avoir ce tableau sous les yeux, on peut donc deviner la lettre que pense une personne, à la condition toutefois que cette personne fasse connaître, d'une manière quelconque, les colonnes où cette lettre figure. En répétant plusieurs fois l'opération, on peut deviner, lettre par lettre, le nom d'une personne, ses prénoms, son lieu de naissance, etc., etc.

Si l'on eût formé un tableau des noms de baptême les plus communs, ou des noms de nos 86 départements, on eût pu, de la même manière, dire à toute personne, non plus lettre par lettre, mais du premier coup, comment elle se nomme, ou dans quel département elle est née.

L'opération, à la vérité, eût été alors un peu plus difficile, d'abord parce que l'addition à faire eût porté sur des nombres plus grands, ensuite parce qu'il eût été nécessaire de savoir, par cœur, la relation qui unit les nombreux objets que l'on considère aux numéros en même nombre qui leur correspondent. Cette dernière difficulté serait de beaucoup la plus sérieuse, peut-être même serait-elle insurmontable, si la mnémotechnie n'avait fait connaître, depuis très longtemps déjà, des moyens variés, et pour ainsi dire infaillibles, d'associer une suite de nombres à une suite d'objets.

IV. — Structure du tableau.

13. — Étant donnés *n* objets à distribuer en un tableau de *c* colonnes, on peut, en opérant toujours d'après la règle que nous avons formulée (4), obtenir un très grand nombre de tableaux différents, et cela pour deux raisons.

La première c'est que les *n* objets donnés peuvent être rangés dans un ordre quelconque, peuvent être numérotés d'un très grand nombre de manières différentes.

La seconde, c'est que les nombres qui figurent dans chaque colonne du tableau peuvent y être placés dans tel ordre qu'on veut, peuvent y être permutés de toutes les manières.

14. — Dans les deux tableaux que nous avons formés plus haut, nous avons opéré à cet égard de la façon qui nous a paru la plus simple.

L'ordre où nous avons rangé nos objets, pour les numéroter, n'a pas été quelconque : ç'a été, pour les 31 premiers nombres, leur ordre de grandeur croissante; pour les 26 lettres de notre alphabet, leur ordre alphabétique.

Dans les colonnes de ces deux tableaux, nous avons agi de même. Dans le tableau des 31 premiers nombres entiers, les nombres de chaque colonne, lus de haut en bas, vont en croissant. Dans les tableaux des 26 lettres, les lettres de chaque colonne se succèdent, de haut en bas, dans l'ordre alphabétique.

15. — Lorsque le nombre n des objets donnés est juste égal à $2^c - 1$, on ne voit pas d'autre façon de faire varier la structure du tableau; mais lorsque n est inférieur à $2^c - 1$, on en aperçoit immédiatement une nouvelle, qui exige, à la vérité, qu'on modifie légèrement notre règle.

Supposons, en effet, que n soit inférieur à $2^c - 1$. Au lieu de donner aux n objets considérés les numéros $1, 2, 3, \ldots n$, comme notre règle l'indique, on pourra leur donner, pour nnméros, n nombres quelconques, choisis parmi les $2^c - 1$ premiers nombres entiers, et il est évident que ces n nombres pourront être choisis à volonté.

16. — Il y aurait encore un autre moyen de former, avec les n objets donnés, un plus grand nombre de tableaux : ce serait de faire varier le nombre c des colonnes. Ce nombre c n'est assujetti qu'à la seule condition de satisfaire à l'inégalité

$$c > \frac{\log n}{\log 2};$$

il a une limite inférieure, mais n'a pas de limite supérieure : on peut lui donner des valeurs en nombre infini. Néanmoins, dans la pratique, on ne donnera jamais à c des valeurs supérieures à n, de façon que nous aurons toujours

$$n \geq c > \frac{\log n}{\log 2}.$$

On pourrait profiter de l'indétermination, même ainsi réduite, du nombre c, pour imposer au tableau à former des conditions nouvelles; pour lui imposer, par exemple, la condition d'avoir, au plus, un nombre donné l de lignes, ou même d'avoir juste l lignes.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

96. — On considère un triangle ABC, inscrit dans un cercle; la hauteur CD menée sur AB rencontre le cercle au point E. On demande de mener par le point E une corde EZ,

rencontrant AB en X, BC en Y, et la circonférence en Z, de façon que $XY = YZ$. *(Reidt.)*

97. — Dans un cercle dont le centre est O, on mène deux diamètres rectangulaires AB, CD; on demande de mener par le point A une corde AY, qui coupe la ligne CO au point X, et la circonférence au point Y, de manière que l'on ait $AX.OX = CX.XY.$ *(Reidt.)*

98. — Dans un cercle dont le centre est C, on mène deux diamètres rectangulaires, AB, EF. On demande de trouver sur l'arc BF un point X tel que si l'on mène les lignes AX, BX, EX, dont la dernière rencontre CB en Y, on ait $AX.BX = CY.XE.$ *(Reidt.)*

99. — En appelant A, B, C les angles d'un triangle, et α un angle déterminé par la relation

$$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C,$$

démontrer que l'on a

$$\cot 2\alpha = \frac{\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C}{2 \sin A \sin B \sin C (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}$$

(Brocard.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

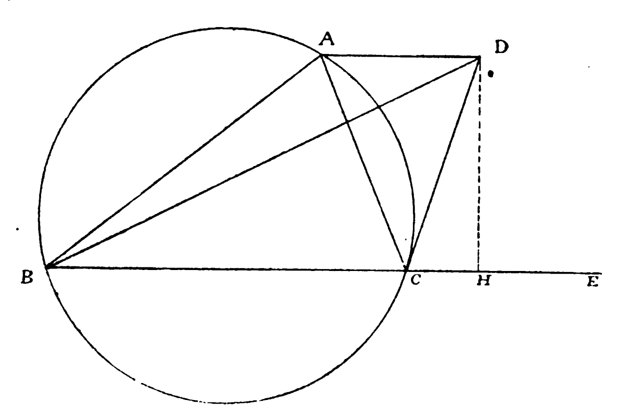
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14492-8.

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. A. Morel.

(*Suite* voir p. 10, 33, 62, 97).

23. — Nous allons donner de l'angle α, qui détermine les points segmentaires, une construction très simple, au moyen de la règle et du compas, et nous déduirons certaines propriétés de la figure qui nous occupe, en partant de cette construction.



Soit ABC le triangle donné ; je mène au point C la tangente au cercle circonscrit, et par le point A je mène à BC la parallèle AD, qui rencontre la tangente précédente au point D. Je dis que l'angle DBC est égal à l'angle α.

En effet, comme l'angle ACD est évidemment égal à l'angle B du triangle, l'angle DCE est égal à l'angle A.

Cela posé, si h est la hauteur du triangle, on a, dans le triangle rectangle BDH

$$BH = h \operatorname{cotg} DBH.$$

D'autre part, on a

$$CH = h \operatorname{cotg} DCH = h \operatorname{cotg} A,$$

puis

$$BC = h(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C).$$

Donc, comme on a $BH = BC + CH$ (en tenant compte des signes), il vient

$$\cot DBH = \cot A + \cot B + \cot C.$$

Donc $$DBH = \alpha.$$

24. — On déduit de là une relation métrique très simple entre les deux angles que fait l'une des droites analogues à BD avec les côtés de l'angle qui la comprend.

L'angle DCE étant égal à A, l'angle BDC est égal à $A - \alpha$.

Le triangle BDC donne alors

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{a}{DC},$$

mais dans le triangle ABC on a

$$\frac{DC}{b} = \frac{\sin DAC}{\sin ADC} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a}.$$

Donc on a $$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{a^2}{bc} = \frac{a^3}{abc}.$$

En prenant cette relation et les deux autres relations analogues, on retrouverait l'équation que nous avons donnée au paragraphe **2**, et on en déduirait la relation entre l'angle α et les angles du triangle.

25. — **Théorème.** — *La droite* $C\omega'$, *faisant avec le côté* BC *l'angle* α, *la médiane correspondant à* BC *et la médiane antiparallèle menée de l'extrémité* B *de* BC *sont trois droites concourantes.*

On sait que, φ_1 et φ_2 étant les angles qu'une droite fait avec les deux côtés d'un triangle, le rapport $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$ est le rapport des distances d'un point quelconque de la droite avec ces deux côtés; de plus, si trois droites issues des sommets sont concourantes, on sait que le produit des trois rapports de sinus ainsi déterminés est égal à l'unité, et que la réciproque est vraie.

Cela posé :

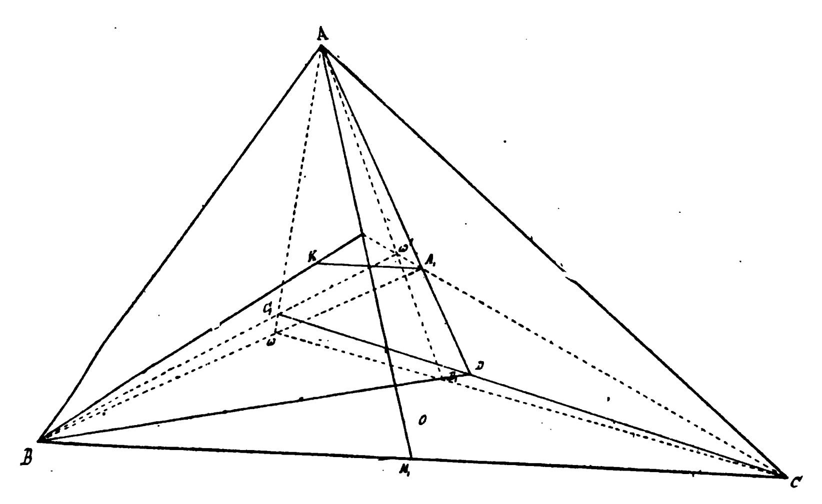
Pour une médiane, le rapport des distances d'un point aux côtés de l'angle est égal à l'inverse du rapport des côtés; donc, si nous appelons δ_a, δ_b, δ_c les distances du point de

rencontre de la médiane AM, et de la médiane antiparallèle BN_2, aux côtés a, b, c, nous avons

$$\frac{\delta_c}{\delta_b} = \frac{b}{c};$$

pour une médiane antiparallèle, au contraire, le rapport des distances aux deux côtés est égal au rapport de ces côtés;

donc $$\frac{\delta_a}{\delta_c} = \frac{a}{c}.$$



Donc, en multipliant, il nous reste

$$\frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{ab}{c^2}.$$

Mais on a alors $$\frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{\sin \alpha}{\sin (C - \alpha)};$$

par suite, la droite $C\omega'$ passe par le point de rencontre des deux droites précédentes.

26. — Théorème. — *La droite* KA_1, *qui joint le point* K *au sommet* A_1 *du triangle* $A_1B_1C_1$, *est divisée en deux parties égales par la médiane partant du point* A_1 *homologue de* A_1.

En effet, nous avons vu précédemment (17) que A_1K est parallèle à BC; donc, puisque les lignes CA_1, BK et M_1A sont concourantes, elles déterminent des segments proportionnels

sur des droites parallèles, et en particulier la droite BC étant partagée en deux parties égales par M_1, la droite K_1A sera divisée en deux parties égales par la droite AM_1. On verrait de même que chacune des droites KB_1, KC_1 est divisée en deux parties égales par la médiane correspondant au côté auquel elle est parallèle.

27. — Théorème. — *Les trois lignes* AA_1, BB_1, CC_1 *se coupent en un même point.*

En effet, appelons d et d' les distances du point A_1 aux deux côtés AC et AB ; le rapport $\frac{d}{d'}$ peut s'écrire

$$\frac{d}{A_1M_1} : \frac{d'}{A_1M_1}.$$

Or on a, puisque A_1 est sur la ligne $C\omega'$, qui fait l'angle α avec BC

$$\frac{d}{A_1M_1} = \frac{\sin(C - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{c^3}{abc};$$

de même, puisque A_1 est sur la ligne $B\omega$, qui fait l'angle α avec BC

$$\frac{d'}{A_1M_1} = \frac{\sin(B - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{b^3}{abc};$$

donc

$$\frac{d}{d'} = \frac{c^3}{b^3}.$$

Tel est le rapport des distances d'un point quelconque de AA_1 respectivement aux deux côtés b et c.

En prenant de même les rapports relatifs aux signes BB_1 et CC_1, on voit que le produit de ces rapports est égal à l'unité. Donc les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes en un point que nous appellerons D.

28. — Théorème. — *La ligne qui joint le point* K *au milieu* M_1 *d'un côté, passe par le milieu de la hauteur correspondante.*

Au point B, je fais avec BC un angle BCF, extérieur au triangle et égal à l'angle BCA ; on sait que l'on a

$$\frac{\sin ABK}{\sin KBC} = \frac{AB}{BC}.$$

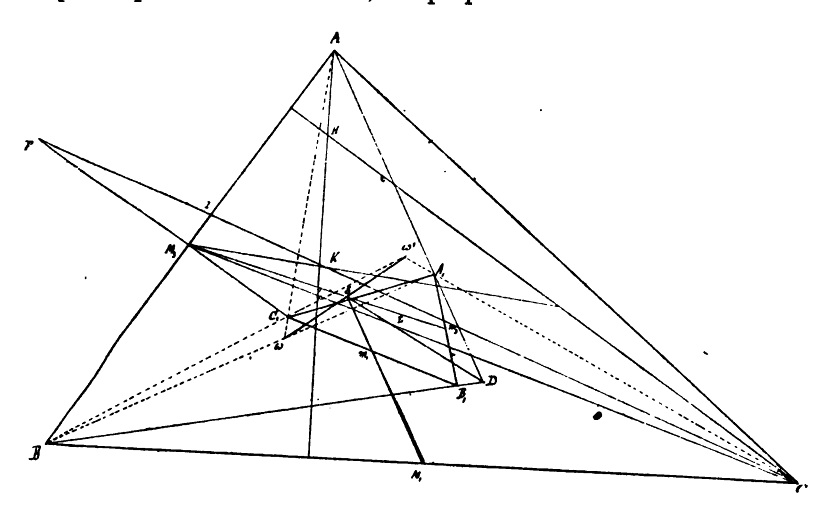
On a aussi

$$\frac{\sin ABF}{\sin CBF} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{AB}{BC}.$$

Donc le faisceau $B(CKI_1F)$ est un faisceau harmonique, et le point K a pour conjugué harmonique par rapport au segment CI le point F de rencontre de CI avec BF.

De même, si l'on mène par le point A une droite faisant avec BC un angle égal à l'angle C du triangle, cette droite sera la conjuguée harmonique de AK par rapport à CA et AB, et par suite passera par le point F.

Donc le triangle BFC est isoscèle, et la ligne FM_3, qui passe par le milieu de BC, est perpendiculaire à BC.



Cela posé, les lignes M_3F, M_3A, M_3K, M_3C forment un faisceau harmonique et la hauteur CH, parallèle au rayon M_3F, est partagée en deux parties égales par les trois autres rayons, ce qui démontre le théorème.

29. — Théorème. — *Si l'on joint les milieux des côtés homologues des triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *on a trois lignes qui se coupent en un même point, situé sur la ligne* DE, *qui joint le point* D *de rencontre des lignes* AA_1, BB_1, CC_1 *au centre de gravité* E, *commun aux deux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$.

En effet, les deux triangles AEA_1, M_1Em_1 sont semblables, puisqu'on a

$$\frac{AE}{EM_1} = 2 = \frac{A_1E}{Em_1};$$

il en résulte que les lignes AA_1 et M_1m_1 sont parallèles; or, dans le triangle ABC, les lignes AA_1, BB_1, CC_1 se coupent en un même point D; donc, dans le triangle homothétique $M_1M_2M_3$, les lignes M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3 se couperont en un même point S qui sera sur la droite DE, et on aura

$$\frac{DE}{ES} = 2.$$

30. — Théorème. — *Le point* S *est au milieu de la ligne* $\omega\omega'$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons chercher les distances du point S à l'un quelconque des côtés du triangle, et montrer que chacune de ces distances est la demi-somme des distances correspondantes des points ω et ω'.

Nous avons vu (**27**) que, en appelant δ_a, δ_b, δ_c les distances du point D aux côtés a, b, c, on avait les équations

$$\frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{b^3}{a^3}; \frac{\delta_b}{\delta_c} = \frac{c^3}{b^3},$$

ce que l'on peut écrire

$$\delta_a \,.\, a^3 = \delta_b \,.\, b^3 = \delta_c \,.\, c^3.$$

D'autre part, en appelant Δ la surface du triangle, on a évidemment $\quad a\delta_a + b\delta_b + c\delta_c = 2\Delta.$

On en tire facilement

$$\delta_a = \frac{2\Delta . a^2b^2c^2}{a^3(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}.$$

De même, en appelant ε_a la distance du centre de gravité E au côté a, on sait que l'on a

$$\varepsilon_a = \frac{2\Delta}{3a};$$

Soit σ_a la distance du point S à a; puisque les trois points D, E, S sont en ligne droite, et que DE = 2ES, on a

$$\frac{\delta_a - \varepsilon_a}{\varepsilon_a - \sigma_a} = 2;$$

on en tire, par un calcul facile

$$\sigma_a = 2\Delta \,.\, \frac{a\,(b^2 + c^2)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}.$$

Nous avons vu au commencement de cette étude (**4**) que, en posant $\quad b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = K^2,$

nous avions $\omega B = \frac{c^2 a}{K}$, $\omega' C = \frac{b^2 a}{K}$,

$$\sin \alpha = \frac{2\Delta}{K}.$$

Donc, puisque les distances des points ω et ω' à BC sont respectivement $\omega B \sin \alpha$, $\omega' C \sin \alpha$,

leur somme est $\frac{2\Delta}{K^2} a (c^2 + b^2) = 2\sigma_a$.

Par suite, la distance du point S au côté a est bien la demi-somme des distances des points ω et ω' au même côté. Le même raisonnement s'appliquant évidemment pour un autre côté, le point S est bien au milieu de $\omega\omega'$.

31. — Théorème. — *Les lignes qui joignent les milieux des côtés du triangle* A'B'C' *aux sommets du triangle* ABC *se coupent en un même point* S'.

En effet, dans l'angle $\omega A \omega'$ les droites $\omega\omega'$ et B_1C_1 sont antiparallèles; par suite, la médiane Am_1 et la médiane AS sont des lignes symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\omega A \omega'$, et par suite aussi, de l'angle BAC. Donc, puisque les lignes AS, BS, CS concourent au même point, il en est de même des droites Am_1, Bm_2, Cm_3.

On peut calculer les rapports des distances de ce nouveau point S' aux trois côtés; on a, en effet, comme nous venons de le voir pour le point S :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{a(b^2 + c^2)}{b(c^2 + a^2)}; \quad \frac{\sigma_b}{\sigma_c} = \frac{b(c^2 + a^2)}{c(a^2 + b^2)}.$$

On en déduit, puisqu'il faut pour des points correspondants renverser les rapports,

$$\sigma_a' \,.\, a(b^2 + c^2) = \sigma_b' \,.\, b(a^2 + c^2) = \sigma_c' \,.\, c(a^2 + b^2).$$

32. — Théorème. — *Le point correspondant du point* D *est un autre point* D', *pôle de la corde* $\omega\omega'$ *par rapport au cercle de Brocard.*

Pour le démontrer, je considère le point m_1, milieu de B_1C_1; soit F le conjugué harmonique de E par rapport aux points A_1 et m_1; de l'égalité

$$\frac{A_1E}{Dm_1} = \frac{AF}{m_1F} = 2,$$

je tire facilement $\quad FE = 2A_1E.$

Donc, puisque, en appelant H le point de concours des hauteurs de ABC, j'ai, d'après un théorème connu

$$HE = 2EO,$$

je vois que FH est parallèle à A_1O et que, par suite, F est sur la hauteur correspondant au côté BC.

Cela posé, je considère le faisceau harmonique

$$A\,(A_1Em_1F)\,;$$

les symétriques des rayons par rapport à la bissectrice forment un faisceau harmonique; or

AE a pour symétrique AK;

Am_1 ou AS′ a pour symétrique AS (**31**);

AF (ou AH) a pour symétrique AO, d'après un théorème connu;

Donc le symétrique de AA_1, ou de AD, passe par le point D′, conjugué harmonique de S par rapport à O et K; et puisque OK est le diamètre perpendiculaire à $\omega\omega'$, D′ est le pôle de $\omega\omega'$ par rapport au cercle de Brocard.

33. — Nous avons vu précédemment (**29**) que DES est une ligne droite et, de plus, que DE = 2ES; d'autre part, on sait que OEH est une ligne droite, et que EH = 2OE; donc la ligne DH est parallèle à SO, ou, ce qui est la même chose, à D′O. *(A suivre.)*

SOLUTION 84

Solution par M. YOUSSOUFIAN, élève au lycée de Galata-Seraï (Constantinople).

Démontrer géométriquement que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{p}{q} + \operatorname{arc\,tg}\frac{q-p}{p+q}.$$

Soient AM = q, MP = p perpendiculaire à AM. Je prends MO = p sur le prolongement de AM ; du point O j'élève

la perpendiculaire OS $= q - p$ sur AO et je joins AP, AS, PS.

On a

$$\frac{p}{q} = \text{tg PAM},$$

$$\frac{q-p}{p+q} = p \text{ SAO}.$$

Il s'agit donc de démontrer que SAO + OAP $+ \frac{\pi}{4} = 45°$.

Les deux triangles rectangles PML, SOL ayant l'angle en L égal, sont semblables; par suite

$$\frac{\text{ML}}{\text{LO}} = \frac{p}{q-p} \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{ML}}{p} = \frac{p}{q}$$

ce qui pourrait s'écrire

$$\frac{\text{ML}}{\text{MP}} = \frac{\text{MP}}{\text{MA}}.$$

Dans le triangle APL, la hauteur PM étant moyenne proportionnelle entre AM et ML, ce triangle est rectangle en P. Le triangle APS l'est aussi.

D'autre part les deux triangles rectangles APM, ASO donnent

$$\overline{\text{AP}}^2 = p^2 + q^2 \text{ et } \overline{\text{AS}}^2 = (p+q)^2 + (q-p)^2$$
$$= 2(p^2 + q^2),$$

donc $2\overline{\text{AP}}^2 = \text{AS}^2$

et comme $\overline{\text{PS}}^2 = \overline{\text{AS}}^2 - \overline{\text{AP}}^2$, on a en remplaçant $\overline{\text{AS}}^2$ par $2\overline{\text{AP}}^2$ $\text{PS}^2 = \text{AP}^2$.

Le triangle rectangle APS est donc en même temps isoscèle; par conséquent l'angle PAS $= 45°$. C.Q.F.D.

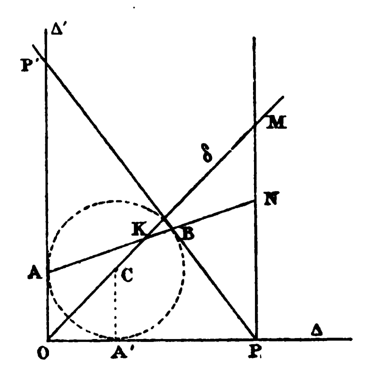
NOTA. — La même question a été résolue par M. de Kerdrel, à Kéruzoret.

QUESTION 86

Solution par M. Youssoufian, au lycée de Galata-Seraï (Constantinople).

On considère deux droites rectangulaires Δ *et* Δ′ *; sur* Δ *on prend un point fixe* P. *Par ce point* P *on fait passer une transversale mobile* δ, *qui forme avec* Δ *et* Δ′ *un triangle rectangle. Imaginons maintenant le cercle inscrit, et soit* A *le point de contact de ce cercle avec* Δ, *et* B *son point de contact avec* δ. *Démontrer que la droite* AB *passe par un point fixe.*

Soit C le centre du cercle inscrit dont le rayon est r. Je prolonge AB et OC jusqu'à leur rencontre M et N avec la perpendiculaire PM élevée sur Δ au point P.



Les triangles PBN, P′AB étant semblables, on a PN = PB puisque P′A = P′B.

D'autre part OP = PM, puisque MOP = 45°, par suite

$$MN = PM - PN = PO - PB = PO - PA' = r$$

et $$OA = r,$$

d'où MN = OA; il en résulte que les deux triangles OAK, MNK sont égaux comme ayant un côté égal et les angles adjacents égaux; dès lors OK = KM. Ainsi la corde AN divise OM en deux parties égales et passe toujours par son milieu K. C. Q. F. D.

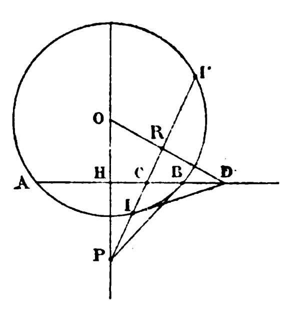
Nota. — La même question a été résolue par MM. Bablon, à Épinal; Desplanques, à Condé-sur-Escaut; de Kerdrel, à Kéruzoret.

QUESTION 89

Solution par M. GINDRE.

On donne trois points en ligne droite A, B, C; *par A et B on fait passer une circonférence quelconque* O, *soit le point* P *le pôle de* AB *par rapport à* O ; *la droite* PC *rencontre* O *en des points* I *et* I'; *trouver le lieu de ces points, lieu qui est une circonférence.*

Je considère les trois points A, B, C et la circonférence O passant par les deux points A et B; le pôle P de AB par rapport au cercle O est déterminé par l'intersection de la perpendiculaire abaissée de O sur AB et de la tangente menée en B au cercle O.



J'élève au point K, milieu de II', la perpendiculaire KO sur II'; elle coupe la droite AB en un point D qui est évidemment le pôle de PII', de plus ce point D est un point fixe, car il est aussi sur la polaire de C par rapport au cercle O; et enfin la droite DI tangente au cercle en I est de longueur constante, car AB est le lieu des points d'égale puissance par rapport aux cercles tels que O.

Donc le lieu des points I, I' est une circonférence ayant pour centre le point D déterminé par $HD = \frac{a^2}{c}$, et ayant pour rayon $DI^2 = \frac{a^2}{c^2}(a^2 - c^2)$, a et c étant les distances HB et HC.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Hugon, Berdon, à Cluny Giat, Julien Sauve à Moulins; de Kerdrel, à Kéruzoret; Bourgarel, à Toulon.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites R et R', non situées dans un même plan, un plan P parallèle à ces deux droites, et un point A. On considère tous les cercles qui ont pour centre le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites R et R', et dont la circonférence rencontre chacune de ces droites R et R'.

Trouver le lieu de la projection de A sur le plan de chacun de ces cercles.

Soient M et M' les points où la circonférence de l'un des cercles considérés rencontre la droite R et la droite R'; la sphère qui a ce cercle pour grand cercle et la sphère qui a MM' pour diamètre se coupent suivant un cercle C; à ce cercle C, on mène les tangentes MT et M'T' aux points M et M'; soit D la droite d'intersection des plans RMT et R'M'T'. On demande le lieu de la trace de la droite D sur le plan P.

Trouver le lieu des extrémités du diamètre du cercle C perpendiculaire au diamètre MM' du même cercle.

Plus généralement, trouver le lieu des extrémités d'un diamètre du cercle C faisant avec MM' un angle constant donné.

ÉCOLE FORESTIÈRE

Composition en mathématiques (3 heures).

Démontrer que le carré d'un nombre premier diminué d'une unité est toujours divisible par 12. (Les nombres 2 et 3 font exception.)

— Déterminer deux nombres sachant que 7 est leur somme et 1267 la somme de leurs cinquièmes puissances.

— Un triangle est défini par sa hauteur, son périmètre et un angle adjacent à la base ; le construire et faire passer par ses trois sommets un triangle équilatéral de surface maximum ou minimum.

— Étant donné un parallélogramme ABCD dont les côtés AB, AC sont fixes de position, mais variables quant à leurs longueurs, de telle sorte que le sommet D décrive une droite fixe EF ; trouver le lieu décrit par le point de rencontre des hauteurs H du triangle ABC,

A chaque point D de la droite EF correspond ainsi un point H du lieu ; établir cette correspondance pour les différentes régions de la droite EF dans le cas général, et spécialement dans le cas où l'angle A est un angle droit.

Composition en trigonométrie et calcul logarithmique
(3 heures).

On donne dans un triangle :

l'angle A égal à 27° 14′ 21″,56
l'angle B égal à 60° 45′ 22″,42
l'angle C égal à 92° 0′ 16″,02

et le périmètre égal à 2330^{m}6815

Déterminer :

1° les trois côtés ;
2° la surface ;
3° le rayon du cercle inscrit ;
4° le rayon du cercle circonscrit.

— Les angles POA et POB étant respectivement égaux à 65° 17′ 34″,79 et à 24° 35′ 27″,28, calculer, en millimètres carrés, les surfaces des trois zones décrites par les arcs PB, BA et AM tournant autour du diamètre MN perpendiculaire au diamètre PQ. Le rayon PO est égal à 37^{m}389765.

— Déterminer les angles satisfaisant à la relation

$$2925 \sin x + 5292 \cos x = 3045.$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Bordeaux.

(Novembre 1882 et avril 1883.)

— On connaît dans un trapèze rectangle ABCD

$$AB = a, \ DC = b, \ BC = h;$$

calculer le rapport des volumes engendrés en faisant tourner le trapèze successivement autour de a et de b.

Application : $a = 1200$; $b = 550$; $h = 240$.

— Trouver un angle x tel que

$$\sin x = \frac{5}{12} \operatorname{cotg} x.$$

— On connaît, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse a. et la somme b des deux côtés de l'angle droit ; calculer ces côtés ; discuter les formules.

— Résoudre l'équation

$$\log (20x + 12) + \log (32x - 8) = \log 15.$$

— Les quatre côtés d'un trapèze sont a, b, c, d ; calculer la hauteur du trapèze et les angles.

— Trouver le minimum du trinôme

$$5x^2 - 12x + 16.$$

— Dans un carré de côté a, on inscrit une circonférence de cercle, dans cette circonférence un carré, dans celui-ci une nouvelle circonférence, et ainsi de suite indéfiniment ; calculer la limite sur laquelle tend la somme des circonférences ainsi inscrites.

— Le volume d'un cône est égal à n fois celui d'un cube de côté m, et le rayon de sa base vaut Km. Calculer sa surface latérale.

Application : $n = 3$; $K = \frac{1}{2}$, $m = 7$ mètres.

— La base d'une pyramide régulière est un triangle équi-

latéral de côté a; la somme des trois côtés de l'une des faces est b; calculer le volume et la surface de cette pyramide.

Application : $a = 150$ mètres ; $b = 425$ mètres.

— Un capitaliste possède une somme de 120,000 francs placée à 4 1/4 0/0 ; il dépense chaque année une certaine somme, et joint le reste de son revenu au capital ; au bout de 5 ans, il possède 140,000 francs ; combien dépense-t-il par an ?

Session de juillet 1883.

Série unique (10 juillet).

Étant donnés un point A sur une circonférence de rayon R, le diamètre AOM et la tangente EMF au point M, calculer la distance au centre d'une corde BC, parallèle à la tangente, pour laquelle la surface du triangle ABC est égale à celle du trapèze BCFE. Vérifier la valeur trouvée.

— Dans une sphère S, de rayon R, on inscrit un cube C ; dans le cube, on inscrit une deuxième sphère S'; dans cette sphère S' on inscrit un cube C', et ainsi de suite indéfiniment. On demande : 1° les rayons des sphères successives S, S', S''... ; 2° les expressions des volumes des couches sphériques comprises entre S et S', S' et S'', etc. Vérifier que la somme de tous ces volumes, en nombre infini, est égale à la sphère S.

— Un électroscope est chargé d'électricité positive ; on approche un corps de la boule de l'appareil ; les feuilles se rapprochent jusqu'au contact, puis divergent ensuite. Quelle conclusion doit-on tirer de l'expérience ? Quelle serait la conclusion si les feuilles, après s'être rapprochées jusqu'au contact, ne divergeaient pas ?

— Métallurgie du fer.

— Indiquer les réactions exercées par le chlore sec et par le chlore humide sur les corps suivants :

Acide sulfhydrique ;

Hydrogène bicarboné ;

donner les formules des réactions.

Paris.

Juillet 1883.

Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on prend sur ses côtés des points A′, B′, C′, D′, E′, F′, tels que l'on ait

$$AA' = BB' = CC' = \ldots = FF' = \frac{AB}{n};$$

on demande : 1° de démontrer que l'hexagone A′B′C′D′E′F′ est régulier ; 2° de calculer le rapport de la surface de cet hexagone à celle du premier ; 3° de chercher pour quelle valeur de n ce rapport est le plus petit possible.

— Dans un triangle ABC, on donne a, A, et $b^2 + c^2$; calculer b et c.

— Trouver les limites entre lesquelles h doit être compris pour que l'inégalité

$$x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs réelles de x, positives ou négatives.

— Trouver les valeurs de sin x et sin y, sachant que les lignes trigonométriques des arcs x et y vérifient les deux équations

$$\sin y = K \sin x,$$
$$2 \cos x + \cos y = 1.$$

— Deux circonférences O et O′, de rayon R et R′, sont tangentes extérieurement ; on leur mène une tangente commune extérieure AA′ ; calculer le volume engendré par le trapèze AA′OO′ tournant autour de OO′.

— On donne l'angle A du triangle ABC égal à 60° ; on donne le rapport $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$; calculer $tg\,\frac{B - C}{2}$.

— Étant donnés une demi-circonférence O et son diamètre horizontal AB, on propose de trouver sur la circonférence un point M tel que, en abaissant la perpendiculaire MP sur AB, la somme MP + PA soit égale à une longueur donnée.

— Le côté d'un triangle équilatéral ABC est a. Par le point D, pris sur BC, on mène DE et DF respectivement parallèles à BA et CA. Déterminer la distance BD de façon que le

volume engendré par le parallélogramme AFDE dans sa rotation autour de BC soit les deux tiers du volume engendré par la rotation de ABC autour du même axe.

— Les rayons des bases d'un tronc de cône sont R et r; quelle doit être la hauteur de ce tronc de cône pour que sa surface latérale soit égale à la somme des surfaces des deux bases ?

— On lance d'un point O de bas en haut suivant la verticale un point matériel pesant P avec une vitesse v_0; quand P atteint le point le plus haut de sa course, on lance en O un deuxième point matériel P′ avec une vitesse égale v_0; à quelle hauteur au-dessus de O se rencontreront les deux points ?

— On donne les longueurs $2l$ et $2l'$ de deux cordes parallèles d'un cercle et la distance q de ces deux cordes; déterminer l'expression de la valeur du rayon de ce cercle.

— Trouver les limites entre lesquelles doit être compris le nombre donné m pour que l'équation

$$x^2 + 4mx + 2m^2 + 3m - 1 = 0$$

ait ses racines réelles.

— On considère un trapèze ABCD dans lequel un des côtés non parallèles est perpendiculaire sur la base. On demande de calculer BC, CD, DA, connaissant

$$AB = a, \text{ la surface } s \text{ et le périmètre } p\,;$$

quelles sont les conditions que doivent remplir s et p pour que le problème soit possible ?

— Résoudre l'équation

$$\sin 4x + \sin x = 0.$$

Clermont.

Composition unique.

Étant donnés une circonférence et un point A dans son plan, on mène le diamètre AO. Déterminer sur ce diamètre un point M tel que, en élevant la perpendiculaire MB sur AO, on ait

$$AM + k MB = \text{const.}$$

On désignera par a le rayon du cercle, par d la distance OA, par l la constante, par x l'inconnu OM. On discutera la valeur de x : 1° quand $d = a$, et $k = 2$; 2° dans le cas général. — Résoudre géométriquement la même question.

— Expériences fondamentales sur l'induction électrique.

— Calculer le poids d'un mètre cube d'air à la température de 30°, à la pression 740, l'état hygrométrique étant 0,4 ; sachant que le poids d'un litre d'air sec à la pression 760 et à 0° est 1^g293 ; le coefficient de dilatation de l'air est 0,00367 ; la tension de la vapeur d'eau à 30° est 31, 55 ; la densité de la vapeur d'eau est 0,622.

Toulouse.

Composition unique.

Trouver le maximum et le minimum de l'expression

$$\frac{\operatorname{tg} 3a}{\operatorname{tg}^3 a},$$

lorsque a varie de 0 à 90°. — Indiquer la loi de variation de la fonction lorsque a varie dans les mêmes limites.

— État hygrométrique; sa mesure ; insister sur les hygromètres à condensation.

— On donne un miroir sphérique concave dont le rayon est 5 mètres; à quelle distance du miroir faut-il placer un objet pour qu'il fournisse une image quatre fois plus petite? à quelle distance pour qu'il fournisse une image quatre fois plus grande ?

Poitiers.

Composition unique.

L'apothème d'un cône a une longueur donnée a ; calculer la hauteur sachant que la surface totale est πb^2. Maximum de b.

— Dans un triangle ABC, on mène les bissectrices intérieures et extérieures AD et AD' de l'angle A. On demande de calculer en fonction des trois côtés du triangle le segment

DD′ que ces bissectrices déterminent sur le côté opposé. Quelles doivent être les valeurs des côtés b et c pour que le segment DD′ soit égal à $2a$, en supposant que la différence des carrés $b^2 - c^2$ soit égale à un nombre donné K^2?

— Réfraction à travers les lentilles convergentes. Foyer réel; foyer virtuel. — Rapport de grandeur de l'image à l'objet.

SUR LA FORMATION DE CERTAINS TABLEAUX

Par M. **Désiré André.**

(*Suite et fin*, voir pages 139, 163.)

V. — Forme du tableau.

17. — On peut remarquer que, dans le tableau des 31 premiers nombres entiers, les colonnes ont toutes la même longueur, tandis que, dans le tableau des 26 lettres, il y a des colonnes de trois longueurs différentes. En d'autres termes, on peut remarquer que le premier de ces tableaux est un rectangle, mais que le second n'en est pas un.

En réfléchissant à ce fait, nous sommes parvenu à deux théorèmes très simples, qui nous semblent intéressants, et dont les démonstrations reposent l'une et l'autre sur les deux remarques suivantes.

18. — La première de ces remarques, c'est que, dans le système de la numération binaire, le nombre $2_c - 1$ se représente par une suite 1 1 1 . . . 1, de c chiffres 1. Il s'ensuit évidemment que l'objet dont ce nombre est le numéro figure dans toutes les colonnes du tableau.

La seconde de ces remarques, c'est que, dans le système de la numération binaire, les nombres entiers inférieurs à $2^c - 1$ s'associent par couples, de telle façon que les deux nombres de chaque couple se déduisent l'un de l'autre par la substitution du chiffre 1 au chiffre 0, et *vice versa*. Il est évident que, dans la suite naturelle des nombres entiers,

depuis 1 jusqu'à $2^c - 2$, les nombres d'un même couple sont équidistants des extrêmes et ont une somme égale à $2^c - 1$. Le point important pour nous, c'est que, si les deux nombres d'un même couple sont les numéros de deux objets, ces objets figurent l'un ou l'autre dans toutes les colonnes du tableau, mais ne figurent jamais ensemble dans une même colonne, de telle façon que ces deux objets augmentent le tableau d'une ligne entière, ni plus ni moins.

Ces remarques vont nous permettre de démontrer les théorèmes que nous avons annoncés sur la forme des tableaux. Ces théorèmes correspondent, l'un au cas où n est égal à $2^c - 1$, l'autre au cas où n est inférieur à ce nombre. Ces deux cas sont les seuls qui puissent se présenter, puisque, nous l'avons vu (3), les nombres n et c doivent toujours satisfaire à l'inégalité $n < 2^c$.

19. — Théorème I. — *Si* n *est égal à* $2^c - 1$, *le tableau est toujours un rectangle.*

En effet, les n objets donnés ont alors pour numéros les n nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. Le numéro n, étant égal à $2^c - 1$, introduit, d'après la première remarque, une ligne entière dans le tableau. Les $n - 1$ autres objets constituent $\frac{n-1}{2}$ couples, lesquels, d'après la seconde remarque, introduisent aussi chacun, dans le tableau, une ligne entière. Donc ce tableau se compose de plusieurs lignes, toutes entières; donc il a la forme d'un rectangle.

Ce rectangle, nous le savons, a c colonnes. On peut voir, très facilement, qu'il a un nombre de lignes égal à 2^{c-1}.

20. — Théorème. II. — *Si* n *est inférieur à* $2^c - 1$, *on peut toujours donner au tableau la forme d'un rectangle.*

Pour le démontrer, nous distinguerons deux cas, suivant que n sera pair ou impair, c'est-à-dire de la forme $2k$ ou de la forme $2k + 1$.

Si n est de la forme $2k$, nous partageons nos objets en k couples; à chacun d'eux nous faisons correspondre un des couples de nombres définis dans notre seconde remarque : chacun de ces couples donne une ligne entière au

tableau, ni plus ni moins; ce tableau se compose donc de k lignes, toutes entières : c'est un rectangle.

Si n est de la forme $2k+1$, nous partageons nos $2k+1$ objets en deux parties, l'une formée d'un seul objet, quelconque d'ailleurs, l'autre composée des $2k$ objets restants. A l'objet isolé nous faisons correspondre le nombre $2^c - 1$: il s'ensuit, d'après notre première remarque, que cet objet donnera une ligne entière au tableau. Nous distribuons les $2k$ objets restants en k couples, auxquels nous faisons correspondre k des couples de nombres définis plus haut ; d'après notre seconde remarque, chacun de ces couples apportera aussi au tableau une ligne tout entière. Donc le tableau sera formé de $k+1$ lignes entières, et, par conséquent, aura la forme d'un rectangle.

Ainsi, nous pouvons toujours disposer nos n objets en un tableau rectangulaire. A la vérité, pour arriver à ce résultat, nous modifions notre règle initiale (4), comme nous nous avons dit déjà (15) qu'on peut le faire : au lieu de donner à nos n objets les numéros $1, 2, 3, \ldots, n$, nous leur donnons pour numéros n nombres, choisis d'une manière convenable, parmi les $2^c - 1$ premiers nombres entiers.

VI. — Généralisation.

21. — Dans le problème que nous nous sommes proposé en commençant, chaque objet ne peut avoir, par rapport à chaque colonne, que deux manières d'être différentes : ou il y figure, ou il n'y figure pas. Si donc nous voulons représenter, par une suite de signes, l'ensemble des manières d'être d'un objet déterminé par rapport à toutes les colonnes du tableau, il nous suffit d'employer deux signes différents correspondant, l'un au cas où l'objet figure dans la colonne considérée, l'autre au cas où il n'y figure point.

Nous avons choisi, pour distinguer ces deux cas, le chiffre 1 et le chiffre 0. Nous aurions pu prendre deux autres signes, absolument quelconques. Mais, quels qu'aient été ces signes, ils auraient toujours donné, pour chaque objet du tableau,

une suite correspondant à un nombre écrit en chiffres, dans le système de la numération binaire.

22. — Si on généralise le problème de telle sorte que chaque objet puisse offrir, par rapport à chaque colonne du tableau, trois manières d'être différentes, pour représenter, par une suite de signes, l'ensemble des manières d'être d'un objet déterminé par rapport à toutes les colonnes du tableau, il faudra employer trois signes différents, correspondant aux trois manières d'être de l'objet par rapport à chaque colonne.

On pourra prendre ces trois signes différents d'une manière tout à fait arbitraire ; mais, de quelque manière qu'on les choisisse, les suites de signes correspondant aux objets donnés pourront être regardées comme des nombres, écrits en chiffres, dans le système de numération dont la base est 3.

Si chaque objet pouvait avoir, par rapport à chaque colonne 4, 5, 6,. . . manières d'être différentes, on serait conduit, pour former les suites correspondant aux objets donnés, à employer 4, 5, 6, . . . signes différents, et les suites formées pourraient être regardées comme des nombres, écrits en chiffres, dans les systèmes de numération dont les bases respectives sont les nombres 4, 5, 6, . . .

23. — Il n'est pas malaisé d'imaginer, de bien des façons, des tableaux où chaque objet puisse avoir, par rapport à chaque colonne, plus de deux manières d'être différentes.

Supposons, par exemple, que chaque colonne soit partagée, de haut en bas, en p parties. Un objet quelconque pourra présenter, par rapport à cette colonne, $p + 1$ manières d'être différentes : ou il n'y figurera pas du tout, ou il figurera soit dans la première partie, soit dans la deuxième,... soit dans la p^{me}.

Supposons, pour donner un nouvel exemple, que les colonnes ne soient point divisées, mais que chaque objet puisse figurer jusqu'à p fois dans une même colonne. Un objet quelconque pourra avoir encore, par rapport à chaque colonne, $p + 1$ manières d'être différentes : ou il n'y figurera pas, ou il y figurera une fois, deux fois,... p fois.

Dans chacun de ces exemples, on sera conduit à des suites qui pourront être regardées comme des nombres, écrits en chiffres, dans le système de numération dont la base est $p + 1$.

24. — On peut d'ailleurs former des tableaux qui conduisent à des nombres exprimés à l'aide d'une base supérieure à 2, sans avoir recours aux procédés qui précèdent, c'est-à-dire sans partager aucune colonne en plusieurs parties, ni sans faire figurer plusieurs fois un même objet dans une même colonne.

Imaginons, par exemple, que l'on forme un tableau des 26 lettres de notre alphabet, en convenant de donner à chaque lettre tantôt sa forme majuscule, tantôt sa forme minuscule. Évidemment, chaque lettre pourra présenter, par rapport à chaque colonne, trois manières d'être différentes : ou elle n'y figurera pas, ou elle y figurera sous sa forme majuscule, ou elle y figurera sous sa forme minuscule. Il faudra donc trois signes différents pour écrire les suites de signes correspondant à chaque lettre, et ces suites pourront être regardées comme des nombres, écrits en chiffres, dans le système de numération dont la base est 3.

25. — Dans tous les cas, on le voit, on est ramené à des nombres, écrits en chiffres, dans un certain système de numération. A mesure que la base de ce système augmente, le nombre minimum des colonnes du tableau tend à diminuer. Ce fait provient de ce que, dans un système donné, il faut d'autant moins de chiffres pour écrire tous les nombres inférieurs à une certaine limite, que ce système a plus de chiffres, c'est-à-dire que sa base est plus grande. En général, si l'on représente par n le nombre des objets donnés, par c le nombre des colonnes du tableau, et par β la base du système de numération auquel on est ramené, il faut et il suffit, pour que le tableau puisse être construit, que ces trois nombres n, c, β satisfassent à l'inégalité

$$n < \beta^c.$$

On tire de là

$$c > \frac{\log n}{\log \beta}.$$

Le second membre de cette dernière inégalité est une limite inférieure de c, et l'on voit que cette limite est d'autant moindre que β est plus grand.

QUESTIONS PROPOSÉES

100. — On donne un triangle équilatéral ABC et une droite DE, parallèle au côté BC. Trouver sur la droite DE un point M tel que $MA'.MB'.MC' = K$,
K étant un nombre donné, et A′, B′, C′, étant les points où les droites MA, MB, MC rencontrent respectivement les côtés BC, AC, AB. *(Lucien Lévy.)*

101. — Sur la bissectrice de l'angle droit d'un triangle ABC rectangle en A, on prend un point M. Soit D le point où la bissectrice rencontre l'hypoténuse, P la projection de M sur le côté AC. Déterminer le point M de façon que les aires des triangles BMD et MPC aient une somme donnée.

(Lucien Lévy.)

102. — On considère un point A, mobile sur un demi-cercle BAC, de centre O, et les cercles inscrits aux triangles AOB, AOC. Trouver la position du point A pour laquelle les centres des cercles inscrits et le centre O du cercle donné forment un triangle de périmètre donné. *(G. L.)*

103. — On considère un triangle OPQ. Soit A un point pris sur PQ, A′ le symétrique de A par rapport au milieu de PQ, A″ le symétrique de A′ par rapport au point O. La droite AA″ rencontre OP au point R. Démontrer que la médiane AS du triangle RAP est parallèle à QO. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

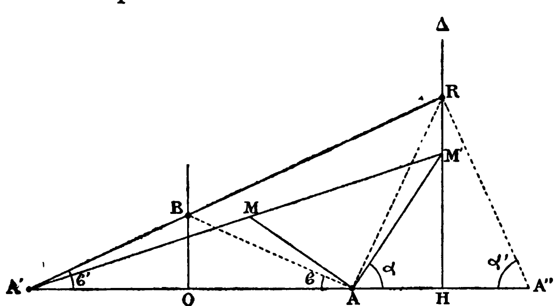
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 16506-3.

NOTE DE GEOMÉTRIE RELATIVE A L'ELLIPSE

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — Nous nous proposons de montrer, dans cette petite note, comment on peut, par une construction qui nous paraît plus simple que celles qu'on emploie ordinairement, *trouver le petit axe d'une ellipse connaissant un point de la courbe et le grand axe, en grandeur et en position.*

La construction dont nous voulons parler est une application nouvelle de *la transformation réciproque* que nous avons exposée l'année dernière, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*. Mais nous tenons à faire remarquer que cette note n'exige, pour être comprise, que la notion élémentaire de la transformation réciproque et, qu'elle s'appuie uniquement sur la propriété fondamentale relative à la transformation de l'ellipse en droite, propriété qui a été démontrée par M. Lauvernay, dans ce journal (*). La construction que nous allons proposer pourrait donc être exposée en ne prenant pour base que des considérations élémentaires.



Soit AA' le grand axe donné, et M un point de l'ellipse; joignons A'M et prolongeons cette droite jusqu'à ce qu'elle rencontre au point M' la perpendiculaire élevée au point A, à AM. Abaissons maintenant de ce point M' une perpendi-

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires, 1882, p. 82.*

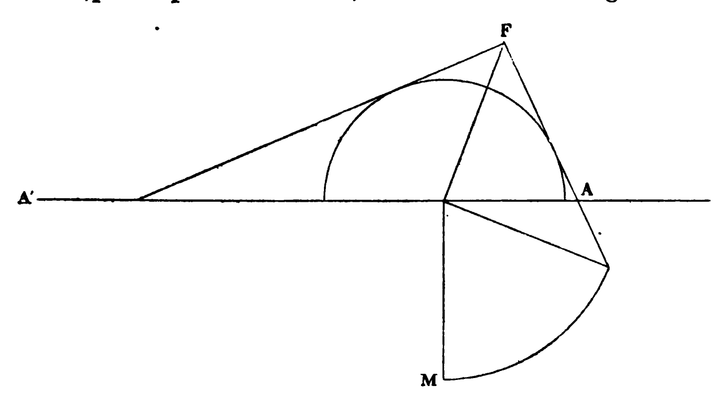
culaire sur la droite A'A prolongée; nous obtenons ainsi une droite Δ, que nous allons considérer.

On sait, par la propriété que nous venons de rappeler. que toute transversale, issue du point A', rencontre l'ellipse en un point μ, la droite Δ en un point μ', ces points μ, μ' formant un segment de droite qui est vu, du point A, sous un angle droit.

Cette remarque étant faite, prenons le point A" symétrique de A, par rapport à Δ, et sur A'A" comme diamètre, décrivons un demi-cercle qui rencontre Δ au point R; nous allons démontrer que A'R rencontre la perpendiculaire élevée au milieu de AA' en un point qui est précisément le sommet de l'ellipse proposée.

En effet, les angles marqués α et α' sont égaux; il en est de même des angles β et β'; de plus α' et β' sont des angles complémentaires. De là résulte ce fait que α et β étant angles complémentaires, l'angle BAR est droit; le point B est donc le sommet de l'ellipse.

2. — Si nous ne nous trompons, cette manière rapide de trouver le second axe d'une ellipse peut présenter quelque intérêt, parce qu'on rencontre, notamment dans la géométrie



descriptive, un certain nombre de questions qui comportent une détermination immédiate et évidente de l'un des axes, mais qui offrent quelque résistance, quand on veut déterminer l'autre axe.

Pour citer un exemple de ce que nous venons d'avancer, imaginons une demi-sphère reposant par son grand cercle de base sur le plan horizontal et cherchons l'ombre portée sur le plan par un point lumineux placé en F.

La construction indiquée par la figure ci-dessus montre que, pour des raisons faciles à donner, AA′ est le grand axe de l'ellipse d'ombre, et que M est un point particulier de cette ellipse. On pourra donc appliquer à cette figure la construction que nous venons d'indiquer plus haut et l'ombre portée sera ainsi déterminée par ses axes, au moyen d'une construction assez rapide.

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. A. Morel.

(*Suite et fin*; voir p. 10, 33, 62, 97 et 169).

34. — *Si des sommets* A, B, C *du triangle* ABC, *on abaisse des perpendiculaires respectivement sur les côtés* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *du triangle* $A_1B_1C_1$, *ces perpendiculaires se coupent en un point* O_1, *qui est situé sur le cercle circonscrit au triangle* ABC.

Soit O_1 le point de rencontre des perpendiculaires abaissées respectivement de A sur B_1C_1 et de B sur A_1C_1. L'angle de ces deux perpendiculaires est égal à l'angle C_1, et par suite à l'angle C. Donc les quatre points A, B, C, O_1 sont sur une même circonférence.

De plus, si l'on joint le point O_1 au point C, la ligne ainsi menée fait avec la ligne AO_1 le même angle que ferait la perpendiculaire menée du point C sur A_1B_1; de même, l'angle BO_1C serait égal à l'angle de BO_1 avec la perpendiculaire menée du point C sur A_1B_1. Donc les trois perpendiculaires se coupent en un même point, qui est bien situé sur la circonférence circonscrite au triangle ABC.

35. — Il est facile de trouver la surface du triangle $A_1B_1C_1$, connaissant la surface du triangle ABC.

En effet, nous avons vu précédemment (7) que, en appelant δ la distance $\omega\omega'$, et d le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC, nous avions

$$d = \frac{2\delta}{\sin 2\theta\sqrt{1 - 3\text{tg}^2\theta}};$$

d'autre part, nous savons (11 et 12) que le triangle $\omega O \omega'$ est isoscèle, et que l'angle en O est égal à 2θ; le diamètre du cercle circonscrit est donc égal à $\frac{\delta}{\sin 2\theta}$. On a par suite, en appelant Δ et Δ_1 les surfaces respectives des deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$, qui sont semblables :

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \left(\frac{\delta}{d \sin 2\theta}\right)^2,$$

ce qui devient $$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{4}(1 - 3\text{tg}^2\theta).$$

Abaissons du point K des perpendiculaires KP, KQ, KR sur les côtés du triangle ABC. Nous savons que l'on a

$$KP = A_1M_1 = \frac{a}{2}\text{ tg }\theta.$$

De même $$KQ = \frac{b}{2}\text{tg}\theta;\quad KR = \frac{c}{2}\text{tg}\theta.$$

Donc on a

$$\text{tri. } PKQ = \frac{1}{8}\, ab\text{ tg}^2\theta \sin C = \frac{1}{4}\Delta\text{ tg}^2\theta.$$

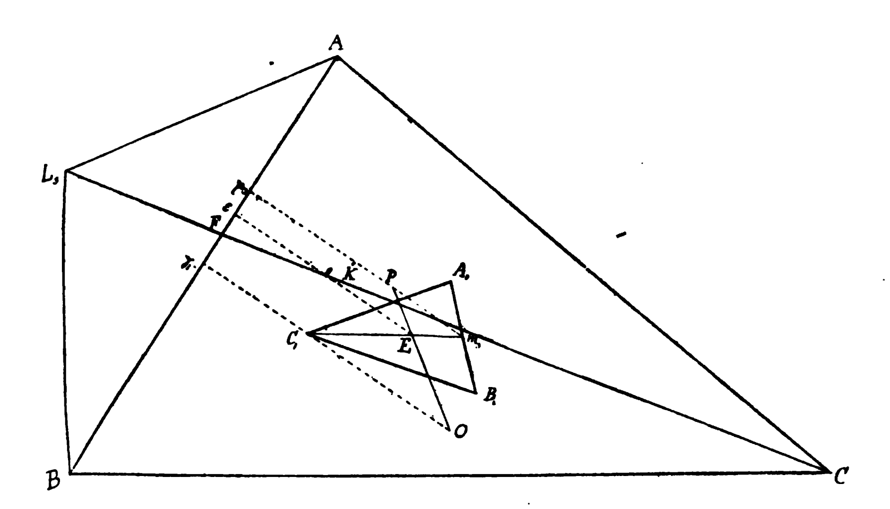
On trouvera les mêmes valeurs pour les deux triangles QKR, RKP. Si donc nous appelons Δ_2 la surface du triangle PQR, nous avons $$\Delta_2 = \frac{3}{4}\Delta\text{tg}^2\theta.$$

Par suite $$\Delta_1 + \Delta_2 = \frac{1}{4}\Delta.$$

36. — Théorème. — *Par le point* K *passent les trois transversales qui joignent les sommets du triangle* ABC *avec les sommets du triangle formé par les tangentes menées par* A, B, C, *du cercle circonscrit.*

Nous avons vu, en effet, que si par les points B et A nous menons des droites faisant avec BA des angles égaux à l'angle C, ces droites rencontrent la ligne CKF en un point

L_3 qui est le conjugué harmonique du point K par rapport aux points C et F (le point F est le point où cette ligne rencontre le côté BA), et que le triangle BL_3A étant isoscèle, la ligne qui joint le sommet au milieu de la base est per pendiculaire sur cette base.

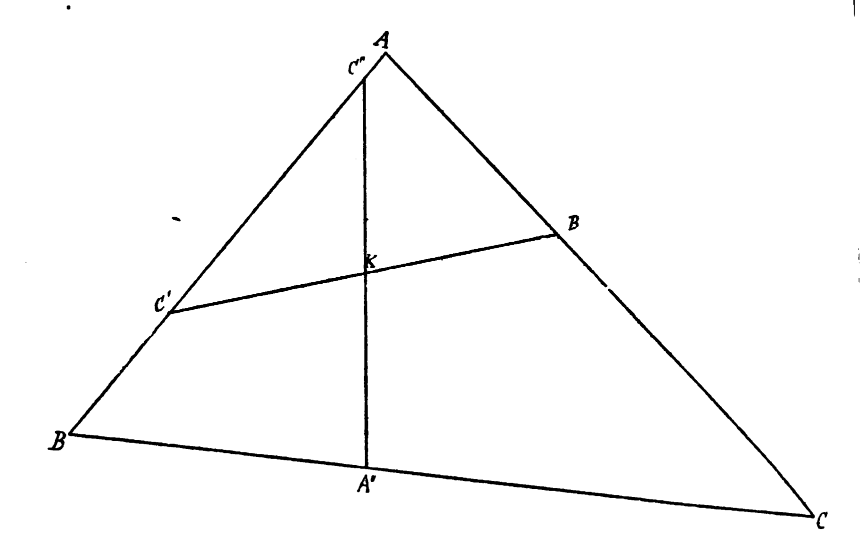


Mais les lignes BL_3 et AL_3, d'après leur construction même, ne sont pas autre chose que les tangentes en B et A au cercle ABC ; si nous prolongeons ces tangentes et que nous prenions de même les points L_2 et L_1 où elles rencontrent la tangente en C, nous verrons, par le même raisonnement que précédemment, que les lignes BL_2 et AL_1 passent par le point K. De plus, nous voyons que, par exemple, les deux côtés AB, AC, la ligne AK et la ligne AL_1 forment un faisceau harmonique.

37. — Théorème. — *Le point* K *est le centre d'un cercle qui coupe les côtés de* ABC *en des points diamétralement opposés.* (En d'autres termes, *par le point* K *passent trois droites égales ayant leur milieu en* K.)

D'après ce que nous avons dit de la détermination du point K, la ligne AE étant la médiane correspondant au

côté BC, c'est-à-dire étant le lieu des milieux des droites parallèles à BC, la ligne AK est le lieu des milieux des droites antiparallèles à BC et comprises dans l'angle BAC.



Si donc par le point K je mène une droite C'B' antiparallèle à BC, elle sera divisée en deux parties égales par le point K; de plus, l'angle AC'K qu'elle fait avec le côté BA (en allant de B vers A) est égal à l'angle BCA.

Si, de même, par le point K je mène C''A'' antiparallèle à AC, et rencontrant BA en C'', elle a aussi son milieu en K, et l'angle BC'K est égal à l'angle ACB. Donc le triangle KC'C'' est isoscèle, et, par suite, la circonférence ayant pour centre le point K, et pour rayon KC', passe par les points de rencontre des côtés du triangle avec les droites antiparallèles aux autres côtés et passant par le point K. Ces droites sont donc bien égales, et sont des diamètres de ce cercle.

38. — Théorème. — *Les perpendiculaires abaissées des milieux des côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *sur les côtés du triangle* ABC *se coupent en un point qui n'est autre que le centre du cercle des neuf points du triangle* ABC.

Nous avons vu (14) que les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ ont le même centre de gravité. Soit E ce centre de gravité commun. La ligne C_1E rencontre A_1B_1 au point m_3, et l'on a

$$\frac{C_1E}{Em_3} = \frac{2}{1}.$$

(Voir la figure au n° 36.)

Par conséquent, en appelant γ_1, ε et μ_3 les projections des trois points sur AB, nous avons aussi

$$\frac{\gamma_1\varepsilon}{\varepsilon\mu_3} = \frac{2}{1}.$$

D'autre part, soit P le centre du cercle des neuf points du triangle ABC, on sait que les trois points O, E, P sont en ligne droite, et que l'on a

$$\frac{OE}{EP} = \frac{2}{1}.$$

Or, la projection du point O sur AB se confond avec le point γ_1, qui lui-même est au milieu M_3 de BC; il en résulte que la projection du point P se confond avec celle du point m_3, ce qui exige que la perpendiculaire abaissée du milieu de B_1C_1 sur le côté BC passe par le point P.

Le théorème est donc démontré.

Nous arrêterons ici cette étude, déjà bien longue. Notre but, en l'entreprenant, était seulement de faire connaître à nos lecteurs quelques-unes des propriétés de ce nouveau cercle lié au triangle; nous avons pris les plus élémentaires et nous avons ainsi indiqué aux lecteurs français une figure déjà connue à l'étranger depuis 1877, époque où de premières propositions sur la figure ont été signalées par notre camarade Brocard dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*. M. Brocard a continué les communications dans le Journal belge jusqu'en 1881, puis dans des journaux allemands, tels que le *Zeitschrift für math. und natur. Unterricht*, dirigé par M. Hoffmann.

Comme nous l'avons dit au début, M. Neuberg, dans le *Mathesis*, a proposé de donner au nouveau cercle le nom de

son inventeur, ce qui, à notre avis, présente deux avantages : d'abord, de conserver ses droits à M. Brocard, et, en outre, de ne rien préjuger sur les propriétés d'une figure. De nouvelles découvertes peuvent, en effet, rendre singulier un nom qui serait consacré par l'usage, et qui ne serait plus en accord avec les propriétés connues de la figure.

C'est en particulier ce qui arrive, par exemple, pour le cercle que nous appelons le *cercle des neuf points*, et qui, en réalité, contient *dix-huit* points remarquables liés au triangle. Tandis que le nom de *cercle de Feuerbach*, que lui donnent les Allemands, du nom de celui qui leur a fait connaître ce cercle, ne présente pas la même singularité choquante.

Pour revenir au cercle qui nous intéresse, nous dirons que, dans l'étude que nous venons d'en faire, nous nous sommes contenté de grouper, d'une manière aussi méthodique que possible, et surtout de présenter très élémentairement les propriétés à la fois les plus simples et les plus importantes de ce cercle. Si, le plus souvent, nous avons cherché des démonstrations purement synthétiques, et à la portée de tous nos jeunes lecteurs de Mathématiques élémentaires, nous n'avons aucun droit sur les propositions mêmes que nous avons exposées, comme pourrait le faire croire l'absence complète d'indications sur les auteurs de ces propositions.

Nous nous sommes arrêté à la mesure qui consistait à ne nommer personne dans cette étude, à part M. Brocard, auquel revient le premier, de l'avis de tous, l'honneur de la découverte de ce cercle, précisément parce que, dans bien des cas, il peut être difficile de fixer bien exactement le nom de l'auteur véritable d'une découverte ; un auteur peut, de très bonne foi, trouver par lui-même un théorème, sans que pourtant on puisse, dans une publication, lui en attribuer la propriété, si ce théorème est déjà connu, et publié à l'insu de ce géomètre.

C'est en particulier ce qui nous est arrivé à propos de l'étude actuelle. Un théorème (20, 21 et 22) avait été proposé dans le *Journal de Mathématiques spéciales*; lorsque, dans le

cours de nos recherches, nous sommes arrivé à ce théorème, nous avons reconnu que la même propriété avait été énoncée d'une manière plus générale dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et avait été en outre reprise sous la même forme dans une étude sur le centre des médianes antiparallèles, publiée en 1881 dans le *Mathesis*. Il est bien certain, du reste, que le géomètre qui nous avait envoyé l'énoncé de cette question ignorait qu'elle eût été déjà proposée, et même résolue, ce que nous ignorions nous-même à ce moment.

Nous croyons aujourd'hui devoir signaler les savants, tant français qu'étrangers qui se sont occupés de recherches sur la figure que nous avons présentée à nos lecteurs. Ce sont d'abord M. Brocard, capitaine du génie; puis MM. Tarry, Neuberg, auxquels nous joindrons, en Allemagne, les noms de MM. Stoll, Kiehl et Fülhmann, qui ont indiqué un certain nombre des propriétés non signalées par M. Brocard dans le mémoire qu'il a présenté à ce sujet à l'Association française, au Congrès d'Alger.

Comme nous le disons plus haut, nous ne considérons pas cette étude comme complète, et nous signalerons à nos lecteurs, en leur proposant comme questions à résoudre, quelques-unes des propriétés les plus intéressantes que nous rencontrerons au sujet du cercle de Brocard; nous croyons qu'il y a encore des points intéressants à élucider à ce sujet. A. M.

PROPOSITIONS

RELATIVES AU CERCLE DE BROCARD

Nous signalons à nos lecteurs, comme nous venons de l'annoncer dans l'étude que nous avons faite du cercle de Brocard, les propositions suivantes :

1. — Le triangle ABC et le triangle $A_1B_1C_1$ sont homologiques; leur centre d'homologie est le point D; leur axe d'homologie est une droite G_1 qui est perpendiculaire à OD.

2. — Soit C_2 le point d'intersection du cercle de Brocard avec le cercle passant par les points A, B, O : de même A_2 et B_2 seront les points communs aux cercles de Brocard et aux cercles BCO, CAO. Les lignes A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sont les médianes du triangle $A_1B_1C_1$. Les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sont donc homologiques ; leur centre d'homologie est le point E, centre de gravité du triangle ABC. L'axe d'homologie est une droite G_2, perpendiculaire à la ligne qui joint le point E au centre du cercle de Brocard.

3. — Le triangle ABC et le triangle $A_2B_2C_2$ sont homologiques ; leur centre d'homologie est le point K.

4. — Les droites issues des sommets du triangle ABC, et faisant avec ses côtés, extérieurement, l'angle α, déterminent deux triangles T'_α, T''_α, égaux entre eux et semblables au triangle donné. Les centres des cercles circonscrits à ces nouveaux triangles sont les symétriques des points ω et ω' par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle primitif.

5. — Les points segmentaires ω et ω' sont les centres des médianes antiparallèles des triangles T'_α et T''_α.

6. — Les parallèles menées par A, B, C aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$ se coupent au point N de rencontre de OD et du cercle circonscrit à ABC.

7. — Les centres α_1, β_1, γ_1 des triangles circonscrits à ωBC, ωCA, ωAB sont les sommets d'un triangle qui admet pour l'un des points segmentaires le centre O du cercle circonscrit à ABC. Il en est de même pour les centres α_2, β_2, γ_2 des cercles circonscrits aux triangles ω'BC, ω'CA, ω'AB. Les triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sont semblables au triangle ABC. De plus, les triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sont homologiques, leur centre d'homologie étant le point O.

Tous ces énoncés nous ont été communiqués par M. Brocard. Nous publierons les solutions géométriques ou analytiques qui nous seront adressées, en donnant la préférence cependant aux solutions géométriques qui pourraient ainsi prendre place dans la partie élémentaire du Journal, partie qui contient l'étude du cercle de Brocard.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883

Mathématiques élémentaires.

Solution par M. Hadamard, élève au Lycée Louis-le-Grand (copie couronnée).

On donne deux droites R *et* R′, *non situées dans un même plan et un plan* P *parallèle à ces deux droites. On considère tous les cercles qui ont pour centre le milieu* O *de la perpendiculaire commune aux deux droites, et dont la circonférence rencontre ces deux droites.*

1° Trouver le lieu de la projection d'un point A *de l'espace sur le plan de ces cercles.*

2° Si M, M′ *sont les points de rencontre du cercle* O *avec les deux droites, la sphère qui a* MM′ *pour diamètre et la sphère qui a le cercle* O *pour grand cercle, se coupent suivant un cercle* C. *A ce cercle on mène aux points* M, M′ *les tangentes* MT, M′T′. *Les plans* RMT, R′M′T′ *se coupent suivant une droite* SS′, *lieu de la trace de cette droite sur le plan* P.

3° Si l'on mène le diamètre du cercle C *perpendiculaire à* MM′, *quel est le lieu des extrémités de ce diamètre?*

4° Plus généralement, quel est le lieu des extrémités d'un diamètre du cercle C *faisant avec* MM′ *un angle donné* α?

1° Soit LL′ la perpendiculaire commune (1), O son milieu. Projetons en H,H′, sur un plan mené par le point O parallèlement au plan P, les points M,M′. Les lieux des points H,H′ sont respectivement les projections Ox,Ox' des droites R,R′.

D'ailleurs les rectangles MHOL, M′H′OL′ montrent que MH = M′H′, et par suite ces droites sont les côtés opposés d'un parallélogramme. Il en résulte que les droites MM′, HH′ ont même milieu I. Mais les triangles rectangles OMH, OM′H′, égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, montrent que le triangle HOH′ est isos-

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

cèle et par suite que la droite OI est bissectrice de l'angle xOx'.

Le plan MOM' passe donc par l'une des deux bissectrices OI,OI' de l'angle xOx'.

Ce fait que le plan MOM' passe tantôt par l'une de ces deux droites, tantôt par l'autre, tient à ce qu'il existe deux séries de cercles satisfaisant à l'énoncé. En effet, on peut obtenir les points M,M' en portant sur les deux droites deux distances LM = L'M'. Mais on peut à une même longueur LM portée dans un certain sens, faire correspondre deux longueurs L'M' portées dans deux sens différents, ce qui donne deux cercles OMM'.

Les considérations précédentes montrent immédiatement quel est le lieu de la projection a du point A. Il se compose de deux circonférences décrites dans des plans perpendiculaires respectivement à OI et OI' et ayant respectivement pour diamètres les perpendiculaires abaissées du point A sur ces deux droites.

2° On voit immédiatement que le cercle C est le cercle décrit sur MM' comme diamètre dans un plan perpendiculaire à OI (ou OI'). Par suite les tangentes MT,M'T' sont perpendiculaires au plan MOM', et l'on voit que la droite SS' n'est autre que la perpendiculaire à ce plan, inscrite entre les deux droites R et R'.

Projetons alors la figure sur le plan P. La projection ss' de SS' sera perpendiculaire à la trace du plan MOM', trace qui est parallèle à OI, puisque OI est parallèle au plan P. Cette projection a donc une direction fixe. De plus, si nous prenons pour les points S et S' servant à définir SS' ceux qui sont sur R et R', les points s et s' seront respectivement sur deux droites fixes, savoir les projections r et r' de R et de R'. D'ailleurs la trace h dont nous cherchons le lieu est sur ss' et (à cause des triangles semblables hSs, hS's') la divise dans le rapport $\frac{S's'}{Ss}$, rapport qui est constant puisque les droites R et R' sont parallèles au plan P. Donc le lieu du point h est une droite passant par le point l où se rencontrent les projections r et r'.

On peut dire que ce lieu est la droite menée par le point l, de façon que les sinus de ses angles avec r et r' soient entre eux comme sS et s'S'. Car ces sinus sont dans le rapport des perpendiculaires hp, hq abaissées du point h sur r et r', perpendiculaires qui, à cause de l'égalité des angles s,s', sont entre elles comme hs et hs', ou comme sS et s'S'.

A la seconde série de cercles Q correspond un second lieu du point h, savoir une droite telle que le rapport des sinus de ses angles avec les droites r et r' soit aussi égal à $\frac{\mathrm{S}s}{s'\mathrm{S}'}$, mais située dans l'angle des droites r et r' où ne se trouve pas la première. Ces deux lieux sont, comme on le voit, conjugués harmoniques par rapport à l'angle (r, r').

La droite MM' se trouve être définie absolument comme la droite ss', et par suite le point m où elle perce le plan P décrit la même droite lh.

Quant à la relation qui lie les points m et h, c'est

$$lm \,.\, lh = \text{const.}$$

En effet, je dis d'abord que cette relation existe quand le plan P contient la droite R'.

Pour cela je mène par le point I une parallèle à ss'. Cette parallèle perce le plan P en un point S', situé sur la parallèle à OI menée par le point s' et aussi sur la projection de MM', puisque le plan projetant de MM' et le plan S_1'IM' se confondent tous deux avec le plan perpendiculaire à OI au point I. Cette même projection contiendra encore la projection I' de I. Or le triangle S_1'IM est rectangle, puisque SS' est perpendiculaire au plan MOM'. Il en résulte que le carré de II', c'est-à-dire une constante, est égal au produit $\mathrm{I'S}_1'.\mathrm{I'M'}$, produit qui est proportionnel au produit L'S'.L'M', puisque les triangles rectangles L'M'I, $\mathrm{S'M'S}_1'$ ont un angle aigu constamment égal au demi-angle des deux droites.

La relation démontrée dans ce cas particulier subsiste généralement; car, les droites MM',LL',SS' étant parallèles à un même plan fixe, les segments de lh sont proportionnels à ceux de R'.

3° et 4° Si $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_1'$ désigne le diamètre du cercle C faisant avec MM' l'angle α, on voit que le point M_1 n'est autre que

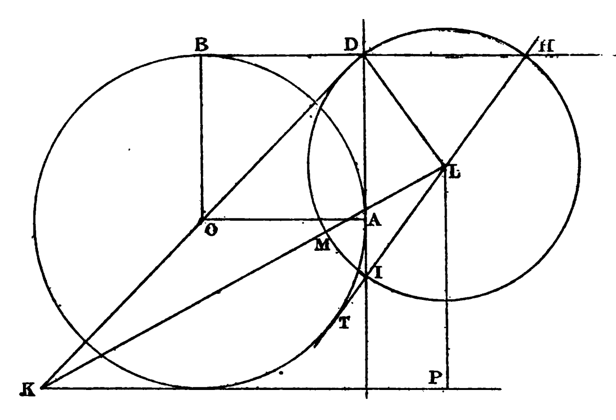
le point M qui a tourné autour de OI de l'angle α. Son lieu n'est donc autre que la droite R qu'on aurait fait tourner de l'angle α autour de l'axe OI.

Il y a, comme toujours, deux lieux; les premiers lieux sont les génératrices d'une surface de révolution d'axe OI; les seconds les génératrices d'une surface de révolution d'axe OI'.

QUESTION 45

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Charleville.

On considère un cercle C *et deux rayons rectangulaires* OA, OB ; *les tangentes aux points* A *et* B, *supposées fixes, forment avec une troisième tangente mobile un triangle rectangle. On imagine le cercle circonscrit à ce triangle et l'on propose de démontrer que ce cercle est constamment tangent à un cercle fixe que l'on déterminera.* (G. L.)



Soit D le point de concours des tangentes en A et B. HIT la tangente mobile, L le centre du cercle Δ circonscrit au triangle IDH, K le symétrique de D par rapport à O et enfin M le point d'intersection de KL et de Δ.

Si du point L nous abaissons la perpendiculaire LP sur la tangente KP au cercle C, nous aurons

$KL^2 = KP^2 + LP^2 = \left(2R + \frac{DH}{2}\right)^2 + \left(2R - \frac{DI}{2}\right)^2$ et, en développant,

$$KL^2 = 4R^2 + 2R \,.\, DH + \frac{DH^2}{4} + 4R^2 - 2R \,.\, DI + \frac{DI^2}{4}$$

puis en remarquant que $DH^2 + DI^2 = IH^2 = 4LI^2$

$$KL^2 = 4R^2 + LM^2 + 2R(2R + DH - DI)$$
$$= 4R^2 + LM^2 + 2R[R + DH - (DI - R)].$$

Mais $R + DH = BH = HT = HI + IA$

$$DI - R = IA$$

d'où, par soustraction,

$$R + DH - (DI - R) = HI = 2LM.$$

L'égalité précédente deviendra donc

$$KL^2 = (KM + ML)^2 = (2R + LM)^2,$$

ce qui exige que $KM = 2R$.

Le cercle Δ reste donc constamment tangent à un cercle de centre K et de rayon $2R$.

Remarque. — On pourrait chercher le lieu décrit par le point L. Ce lieu est facile à déterminer, car si nous tirons LD, nous aurons

$$LK - LD = LM + KM - LD = 2R.$$

Cette égalité montre que le lieu est une hyperbole ayant ses foyers en D et K, tangente au cercle C aux points d'intersection de KD avec ce cercle, et dont les asymptotes sont OA et OB.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Puig, à Marseille; Deville, à Lorient.

QUESTION 64

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Charleville.

On donne un demi-cercle, construit sur la droite PQ *comme diamètre; soient* A *et* B *deux points pris sur la circonférence et tels que* $PA + QB = 2R$ *; les droites* PB *et* QA *se coupent en un point* C.

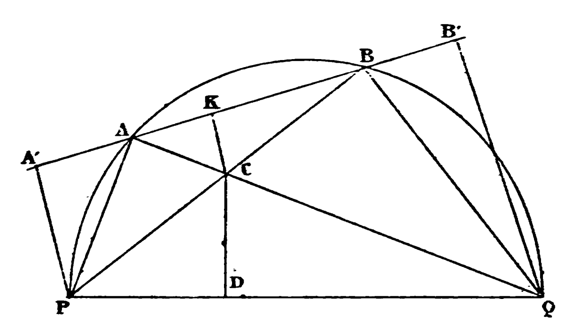
1° Démontrer que le triangle CPQ *jouit de cette propriété que l'inverse de la hauteur relative à* PQ *est égal à la somme des inverses des côtés qui la comprennent.*

2° Etablir que cette propriété s'applique aussi au triangle CAB, *en considérant la hauteur issue du point* C.

3° Étudier la variation de AB *quand le point* A *est supposé mobile sur la circonférence, et montrer que cette longueur passe par un maximum relatif quand la figure* PABQ *est un demi-hexagone régulier.*

4° Ayant projeté les points P, Q *sur* AB, *on obtient deux points* A′, B′. *On propose d'établir la relation qui existe entre* AB *et* A′B′.

(G. L.)



1° Soit CD la hauteur du triangle PCQ relative au côté PQ. En égalant deux expressions de la surface de ce triangle, nous aurons

$$PQ.CD = PA.CQ;$$

d'où

$$\frac{1}{CD} = \frac{PQ}{PA.CQ}; \qquad (1)$$

Or les triangles PCA et BCQ, qui sont semblables, donnent la proportion

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{PA}{BQ}$$

de laquelle on déduit

$$\frac{CP + CQ}{CP} = \frac{PA + BQ}{PA} = \frac{2R}{PA};$$

puis

$$\frac{CP + CQ}{CP.CQ} = \frac{2R}{PA.CQ} = \frac{PQ}{PA.CQ}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) montrent que

$$\frac{1}{CP} = \frac{CP + CQ}{CP.CQ} = \frac{1}{CP} + \frac{1}{CQ}.$$

2° Du point C abaissons la perpendiculaire CK sur AB ; de la similitude des triangles PCQ et ACB on déduit

$$\frac{CK}{CD} = \frac{CA}{CP},$$

puis

$$\frac{1}{CK} = \frac{CP}{CA.CD} = \frac{CP}{CA}\left(\frac{1}{CP} + \frac{1}{CQ}\right)$$
$$= \frac{1}{CA} + \frac{CP}{CQ.CA},$$

ou, en remarquant que

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{CA}{CB}, \quad \frac{1}{CK} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}.$$

3° Le quadrilatère inscriptible PABQ donne

$$PQ.AB = BP.AQ - AP.PQ$$

ou, en posant $PA = x$ et $PQ.AB = m$

$$AB.2R = m = \sqrt{x(4R - x)(4R^2 - x^2)} - x(2R - x).$$

Après avoir fait disparaître le radical et ordonné, il vient

$$2x^2(4R^2 - m) - 4Rx(4R^2 - m) + m^2 = 0.$$

La condition de réalité de x est

$$2m^2 + 4R^2m - 16R^4 \leq 0$$

ou, m' et m'' désignant les racines de ce trinôme,

$$m'' < m \leq m'.$$

Or $m'' = -4R^2$; $m' = 2R^2$ et m ne peut être négatif; la condition devient donc $m \leq 2R^2$.

Le maximum de m sera donc $2R^2$ et alors $AB = R$, $x = R$ et PABQ est bien un demi-hexagone régulier.

Ceci nous fait voir que, PA croissant de 0 à R, AB croît de 0 à R et que, PA continuant à croître jusqu'à 2R, AB diminue jusqu'à 0.

4° Les triangles PAA' et PQB, QBB' et PQA étant semblables, nous aurons

$$AA'.PQ = PA.BQ$$
$$BB'.PQ = PA.BQ$$

d'où $$AA' = BB' = \frac{PA.BQ}{2R}$$

et $$A'B' - AB = AA' + BB' = \frac{PA.BQ}{R}.$$

AB et PA.BQ étant maximums tous deux pour PA = BQ = AB = R, A'B' sera maximum en même temps qu'eux.

Alors A'B' = 2R, ce qui pouvait facilement se voir *a priori*.

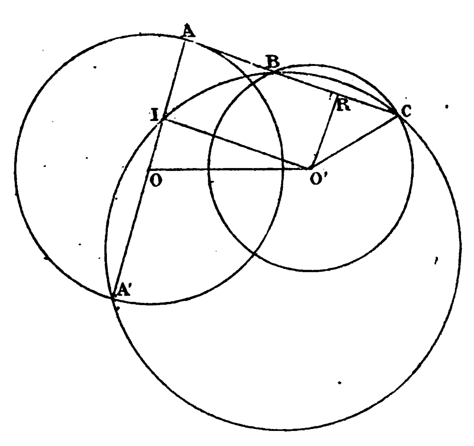
NOTA. — La même question a été résolue par M. A. de Kerdrel, à Keruzoret.

QUESTION 66

Solution par M. AUBRY, élève au Lycée de Charleville.

On considère deux cercles Δ et Δ' se coupant orthogonalement. On prend sur Δ un point quelconque A, et on mène par ce point à Δ une tangente qui rencontre Δ' aux points B et C; par ces points et par le point A', diamétralement opposé à A, on fait passer une circonférence qui rencontre AA' en un point I. Trouver le lieu décrit par ce point, lieu qui est une circonférence.

(G, L.)



Soit K le milieu de BC; nous avons

$$AA'.AI = AB.AC = AK^2 - CK^2.$$

Or le trapèze rectangle OO'KA donne la relation

$$OO'^2 = AK^2 + OA^2 + O'K^2 - 2OA.O'K;$$

d'où $$AA'.O'K = AK^2 + OA^2 + O'K^2 - OO'^2.$$

Mais par hypothèse

$$OO'^2 = OA^2 + O'C^2.$$

de plus $$O'K^2 = O'C^2 - CK^2 ;$$
donc $$OO'^2 - O'K^2 = OA^2 + CK^2.$$

Comparant cette égalité à la précédente, il vient
$$AA'.O'K = AK^2 - CK^2 = AA'.AI.$$

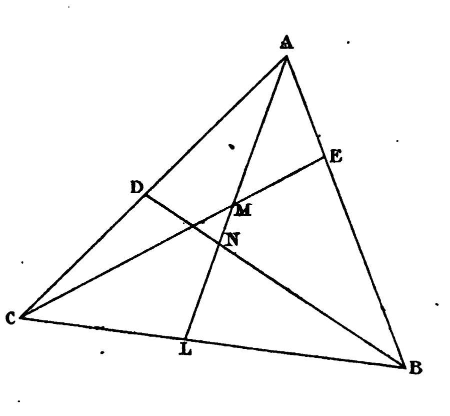
Donc $O'K = AI$ et la figure IAKO' est un rectangle. Le lieu du point I est donc la circonférence décrite sur OO' comme diamètre.

QUESTION 77

Solution par M. VOIGNIER, au Collège de Commercy.

Construire un triangle connaissant les deux côtés AB *et* AC, *et la longueur de la partie de la bissectrice de l'angle* BAC *comprise entre les deux hauteurs partant de* B *et de* C.

$$AC = b$$
$$BA = c$$
$$MN = m.$$



Les triangles semblables MAE et ADN donnent :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AE}{AD} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{AM}{AM - AN} = \frac{b}{c - b},$$

$$AM = \frac{bm}{c - b},$$

$$AN = \frac{cm}{c - b}.$$

D'ailleurs on a $$b \sin A = \frac{bm}{c - b} \sin \frac{A}{2},$$

$$2b \cos \frac{A}{2} = \frac{bm}{c - b}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{m}{2(c - b)}.$$

Connaissant $\cos \frac{A}{2}$ et par conséquent l'angle A, le triangle est déterminé.

NOTA. — La même question a été résolue par M. F. Taratte à Évreux.

QUESTION 99

Solution par M. P. GIAT, élève au Lycée de Moulins.

En appelant A, B, C *les angles d'un triangle et* α *un angle déterminé par la relation*

$$\cot g\, \alpha = \cot g\, A + \cot g\, B + \cot g\, C, \qquad (1)$$

démontrer que l'on a

$$\cot g\, 2\alpha = \frac{\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C}{2 \sin A \sin B \sin C (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}.$$

(Brocard.)

On a
$$\cot g\, 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}. \qquad (2)$$

Or la relation (1) nous donne :

$$\cot g\, \alpha = \frac{\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B}{\sin A \sin B \sin C}$$

et comme $A + B + C = 180°$, la relation précédente devient

$$\cot g\, \alpha = \frac{\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A}{\sin A \sin B \sin C}.$$

Remplaçant $\cot g\, \alpha$ par sa valeur dans l'égalité (2), il vient

$$\cot g\, 2\alpha = \frac{(\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A)^2 - \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{2 \sin A \sin B \sin C (\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A)}$$

Il s'agit de démontrer d'abord que le numérateur est égal à $\frac{1}{2}(\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C)$, c'est-à-dire :

$$\sin^4 A + 2\sin^2 B \sin^2 C \cos^2 A + 4\sin^2 A \sin B \sin C \cos A$$
$$- 2\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = \sin^4 B + \sin^4 C.$$

On peut écrire ainsi :

$$\sin^2 A [1 - (\cos A - 2\sin B \sin C)^2] = (\sin^2 B - \sin^2 C)^2$$
$$= \sin^2(B+C)\sin^2(B-C)$$

ou, comme $\sin A = \sin (B + C)$

$$1 - (\cos A - 2\sin B \sin C)^2 = \sin^2 (B - C)$$

$$1 - \cos^2 (B - C) = \sin^2 (B - C),$$

on arrive à une identité. L'égalité (3) peut donc s'écrire :

$$\cot g\, 2\alpha = \frac{\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C}{4\sin A \sin B \sin C (\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A)}.$$

Or il est facile de reconnaître que

$$2\sin^2 A + 2\sin B \sin C \cos A = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

En effet, on peut écrire :

$$\sin^2 (B + C) - 2\sin B \sin C \cos (B + C) = \sin^2 B + \sin^2 C,$$

et si l'on développe le premier membre, il se réduit à

$$\sin^2 B + \sin^2 C.$$

Donc $\cot g\, 2\alpha = \dfrac{\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C}{2\sin A \sin B \sin C (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}.$

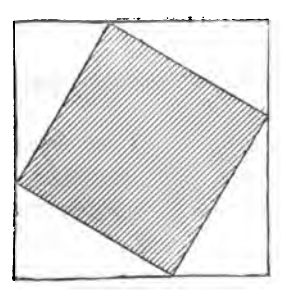
C. Q. F. D.

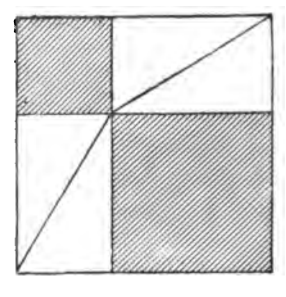
VARIÉTÉS

LA CHAISE DE LA MARIÉE

Parmi la multitude des démonstrations que l'on a données du carré de l'hypoténuse, nous croyons devoir reproduire la suivante, qui appartient au genre casse-tête.

Nous construisons deux carrés égaux, dont chacun des





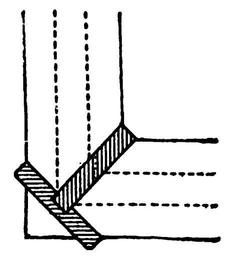
côtés est égal à la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle quelconque, et nous formons les figures 1 et 2. Si de chacun de ces carrés égaux nous retranchons quatre triangles égaux au triangle rectangle donné, il

reste d'une part le carré construit sur l'hypoténuse, et d'autre part les deux carrés construits sur les autres côtés.

La démonstration que nous venons de donner du théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse ne diffère pas essentiellement de la démonstration hindoue, connue sous le nom de la *chaise de la petite mariée*, que l'on rencontre dans l'ouvrage de Bhascara *(Bija Ganita* § *146)*. Après avoir tracé la figure qui n'est qu'une combinaison des deux précédentes, l'auteur hindou se contente de dire : *Voyez*. Le numéro de janvier 1882 du *The Mathematical Magazine* contient une variante de cette démonstration attribuée à Garfield, l'infortuné président des États-Unis assassiné l'année précédente.

LE FOSSÉ DU CHAMP CARRÉ

Un champ carré est entouré d'un fossé dont la largeur est partout la même. On demande d'établir un pont avec deux madriers dont la longueur est précisément égale à la largeur du fossé. La figure (3) représente un coin du champ avec la disposition des deux madriers. Quant à la démonstration mathématique, elle résulte de l'inégalité suivante :



$$2\sqrt{2} < 3.$$

et devient évidente si l'on suppose la largeur du fossé égale à trois unités.

Cette devinette peut trouver son utilité en temps de guerre; nous avons déjà donné un autre exemple, dans notre premier volume, pour la traversée d'un régiment.

DEVINER UN DOMINO PENSÉ

Faites penser à une personne de la société un domino, ou mieux encore deux nombres égaux, ou inégaux, dans la

suite des dix nombres

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Vous pourrez, par une seule question, deviner le domino ou les deux nombres pensés. Cette devinette peut se pratiquer de bien des façons ; voici la plus simple :

Vous faites doubler le premier point et ajouter le nombre qu'il vous plaira ; puis vous faites quintupler le résultat, et ajouter le second point. Alors demandez le total.

Pour obtenir les deux numéros pensés, vous diminuez le total de cinq fois le nombre ajouté ; la différence obtenue est un nombre de deux chiffres dont le premier correspond au premier nombre pensé, et le second à l'autre point.

En effet, si l'on désigne par x le premier point, par y le second, par a le nombre ajouté, les opérations successives sont représentées algébriquement par

$$2x$$
$$2x + a$$
$$10x + 5a$$
$$10x + 5a + y$$

et si l'on retranche $5a$ du résultat, il reste $10x + y$.

On peut deviner de la même manière trois chiffres pensés, en faisant effectuer successivement les opérations précédentes, puis les suivantes :

Doubler le total et ajouter un nombre b,

$$20x + 10a + b + 2y;$$

quintupler le résultat obtenu et ajouter le troisième chiffre pensé, $100x + 50a + 5b + 10y + z$;

demandez alors le résultat. Si vous en retranchez

$$50a + 5b,$$

il reste $100x + 10y + z$,

c'est-à-dire le nombre du système décimal dont les centaines représentent le premier chiffre pensé, les dizaines le second et les unités le troisième.

Il peut sembler curieux que, par une seule question, on puisse deviner trois nombres pensés, puisque l'on n'a qu'une seule équation pour trois inconnues. C'est un exemple des plus simples de l'analyse indéterminée : car l'équation obtenue n'a qu'une seule solution dans ce cas. Plus générale-

ment on pourra opérer dans un système de numération à base quelconque, ou même dans un système à bases multiples, car, dans ces divers systèmes, un nombre quelconque ne peut être représenté que d'une seule manière par des chiffres, puis avec le même signe.

(Extrait des *Récréations mathématiques* de M. E. Lucas, 2e v. Gauthier Villars, éditeur).

QUESTIONS PROPOSÉES

104. — On donne un cercle compris entre deux droites parallèles; on demande de mener à ce cercle une tangente telle que la partie de cette tangente comprise entre les deux parallèles ait une longueur donnée.

105. — On donne deux parallèles MN, M'N', et un point P entre ces deux parallèles; mener par le point P une droite rencontrant MN en x, M'N' en y, de telle façon que Px — Py ait une longueur donnée c.

106. — Deux cercles se coupent en A et B. On demande de mener par le point A une droite rencontrant l'un des cercles en x, l'autre en y, de façon que, si l'on tire Bx et By, on ait $$Bx^2 + By^2 = d^2.$$

107. — On a deux droites rectangulaires AB et CD; sur ACB, on prend, de part et d'autre de C les longueurs CA $= a$, CB $= b$; on demande de mener par le point C, dans l'angle BCD, une droite Cx de longueur c, telle que, si l'on abaisse la perpendiculaire xy sur CD, on ait
$$Ax^2 - Bx^2 = xy^2.$$

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 18546-3.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

I

Soit ACB *un triangle,* K *un point fixe sur* AB.

Je divise KB *en* S *et* CA *en* V *de façon que l'on ait :*

$$\frac{CV}{VA} = \frac{BS}{SK} = m \quad (1)$$

Trouver le lieu du point O *d'intersection des droites* CS, BV *quand* m *varie.*

Soit I la position de V lorsque *m* prend la valeur $\frac{BA}{AK}$ c'est-à-dire lorsque S est en A.

On a par défini ion

$$\frac{BA}{AK} = \frac{CI}{IA} \cdot \quad (2)$$

Multiplions membre à membre (1) et (2) on a

$$\frac{BA}{AK} \cdot \frac{CV}{VA} = \frac{CI}{IA} \cdot \frac{BS}{SK}$$

ou

$$\frac{BA}{BS} \cdot \frac{CV}{VA} = \frac{CI}{IA} \cdot \frac{AK}{SK}$$

ou en multipliant les deux membres par $\frac{OS}{OC}$

$$\frac{OS}{OC} \cdot \frac{BA}{BS} \cdot \frac{CV}{VA} = \frac{OS}{OC} \cdot \frac{CI}{IA} \cdot \frac{AK}{SK}.$$

Le premier membre est l'unité, car il exprime que dans le triangle CAS les trois points V, O, B sont en ligne droite ; le second membre, qui est aussi pa rconséquent égal à l'unité,

exprime donc que dans le triangle CAS les trois points O, K, I sont en ligne droite.

Le lieu de O est par suite KI.

Nous laissons au lecteur à démontrer que, quel que soit K, la droite KI passe toujours par le point A′ symétrique de A par rapport au milieu de BC.

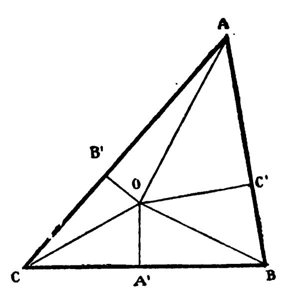
II

Si trois points A′, B′, C′ *pris respectivement sur les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle, sont tels que l'on ait*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a \,.\, CA' + 2b \,.\, AB' + 2c \,.\, BC',$$

les trois perpendiculaires menées en A′ *à* CB, *en* B′ *à* AC, *en* C′ *à* AB *se coupent en un même point.*

Supposons que d'un point O du plan d'un triangle ABC nous abaissions des perpendiculaires sur les trois côtés ; appelons A′, B′, C′ les pieds de ces perpendiculaires et joignons OC, OB, OA.



Posons pour abréger l'écriture

$$CA' = x, \quad AB' = y, \quad BC' = z$$
$$OA' = x', \quad OB' = y', \quad OC' = z'$$

les deux triangles rectangles A′OB, C′OB donnent

$$x'^2 + (a - x)^2 = z^2 + z'^2$$

C′OA, B′OA donnent $z'^2 + (c - z)^2 = y^2 + y'^2$

B′OC, A′OC — $y' + (b - y)^2 = x^2 + x'^2$

Ajoutons ces trois égalités nous avons

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ax + 2by + 2c$$

ou $a^2 + b^2 + c^2 = 2a \,.\, CA' + 2b \,.\, AB' + 2c \,.\, BC'$;

et comme la relation est du premier degré, la réciproque est vraie et le théorème est démontré.

Cette relation entraîne évidemment

$$2a \,.\, CA' + 2b \,.\, AB' + 2c \,.\, BC' = 2a \,.\, A'B + 2b \,.\, B'C + 2c \,.\, C'A.$$

III

Soit O *le point du plan du triangle* ABC *tel que les parallèles menées par ce point aux trois côtés et limitées entre*

ces côtés soient égales entre elles, soit l *cette longueur commune :*

Construire un triangle connaissant la base BC, *l'angle opposé et la longueur* l.

On démontre facilement le lemme suivant :

Lemme. — *Sur les côtés d'un angle* CAB *fixe je prends deux points* C *et* B *tels que*

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{K}$$

K *étant une ligne donnée; la droite* CB *passe par un point fixe* L *que l'on obtient en projetant sur la bissectrice de l'angle* CAB *l'extrémité de la longueur* AH = 2K, *le point* H *étant pris sur l'un des côtés de l'angle donné.*

Il est facile de voir que l'on a

$$l = \frac{2abc}{bc + ac + ba}$$

et d'en tirer $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2a - l}{al}$.

D'après le lemme précédent on peut donc trouver le point L; c'est-à-dire que la bissectrice AL est déterminée et l'on est ramené au célèbre problème de Pappus (généralisé pour un angle quelconque) :

Par un point L *pris sur la bissectrice d'un angle donné, mener une droite de longueur donnée et terminée aux côtés de l'angle.*

La discussion du problème est intéressante.

Ce qui précède montre comment on résoudrait facilement le problème suivant :

Construire un triangle connaissant la base, la somme ou la différence des deux autres côtés et la longueur l.

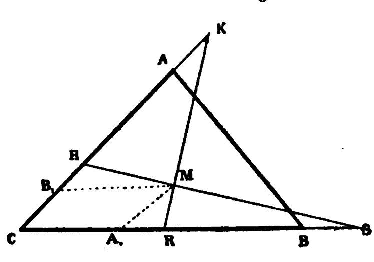
IV

Étant donné un triangle ABC *on prend*

sur AC *(dans le sens* CA) AK = m
— — *(dans le sens* AC) AH = n
— CB *(dans le sens* CB) BS = m
— — *(dans le sens* BC) BR = n

On joint KR, HS. *Ces deux droites se coupent en* M.

Le lieu de M *est, quels que soient* m *et* n, *une droite parallèle à la bissectrice de l'angle* BCA *et qui coupe* AB *au point symétrique par rapport au milieu de* AB *du pied de cette bissectrice.*



Lemme. — *Soit* C_1 *le point symétrique par rapport au milieu de* AB *du pied* C' *sur* AB *de la bissectrice de l'angle* C *du triangle* ABC; *par* C_1 *je mène une parallèle à cette bissectrice; soit* M *un des points de cette parallèle; par* M *je mène une parallèle à* AC *qui coupe* CB *en* A_1 *et une parallèle à* CB *qui coupe* AC *en* B_1*; la différence* $MB_1 - MA_1$ *est égale à la différence des côtés* CB — CA.

Réciproquement, si $MB_1 - MA_1 = CB - CA$, *le point* M *appartient à la droite considérée.*

Je n'insiste pas sur ce lemme facile à démontrer.

Revenons au problème proposé :

Par M je mène une parallèle à CA qui coupe CB en A_1
— — CB — CA en B_1

on a
$$\frac{MA_1}{HC} = \frac{SA_1}{SC}$$
ou
$$\frac{MA_1}{b-n} = \frac{m+n+A_1R}{a+m};$$
$$\frac{MA_1}{A_1R} = \frac{KC}{CR}$$
ou
$$\frac{MA_1}{A_1R} = \frac{b+m}{a-n};$$
d'où
$$\frac{MA_1}{b-n} = \frac{m+n+MA_1\dfrac{a-n}{b+m}}{a+m},$$
d'où
$$MA_1 = \frac{(b+m)(b-n)}{m-n+a+b};$$
on aurait de même

$$MB_1 = \frac{(a+m)(a-n)}{m-n+a+b},$$

d'où $$MB_1 - MA_1 = a - b.$$

Le point M appartient donc, d'après le lemme, à la droite désignée par l'énoncé.

Remarque I. — On trouverait facilement

$$A_1R = B_1H = \frac{(a-n)(b-n)}{a+b+m-n}.$$

Remarque II. — Ce lieu est remarquable parce qu'il semble au premier abord qu'il faudrait encore pour le déterminer une relation entre m et n.

Si l'on joint par exemple KS et HR et que l'on appelle N leur intersection, il n'y a pas de lieu de N à moins que l'on ne donne une relation entre m et n.

Soit $m = n$, on verrait que le lieu de N est la droite perpendiculaire à la bissectrice de l'angle BCA et qui coupe CB au point D tel que $CD = a + b$.

Soit $m^2 + n^2 = K^2$, le lieu est une parabole.

Remarque III. — En opérant par rapport à chaque sommet de ABC comme nous venons d'opérer par rapport au point C, nous trouverons des points analogues au point M, qui seront par conséquent répartis sur trois droites. En nous reportant à l'étude que nous avons publiée au commencement de 1883 dans le *Journal de Mathématiques spéciales* sur de nouveaux points remarquables, etc., on verra facilement que ces trois droites se coupent au point que nous avons appelé ω_1 et nous pouvons énoncer le théorème :

Si l'on prend sur chaque côté d'un triangle le point symétrique par rapport au milieu de ce côté, du pied de la bissectrice tombant sur ce côté, et que par ce point on mène une parallèle à cette bissectrice, on a trois droites qui concourent en un point, par lequel passent également les trois droites qui joignent un sommet au point de contact, sur le côté opposé à ce sommet, du cercle ex-inscrit qui touche ce côté entre les deux autres sommets.

La remarque III peut se généraliser et l'on démontre encore facilement le théorème suivant :

Soient dans un triangle ABC *les trois droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *se coupant en un même point ; soient* α_1, β_1, γ_1 *les symétriques de* α, β, γ *par rapport aux milieux de* BC, *de* AC, *de* AB. *Les droites menées par* α_1, β_1, γ_1, *parallèlement à* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *se coupent en un même point.*

(A suivre.)

CONSIDÉRATIONS

SUR LA PROJECTION OBLIQUE DU CERCLE

Par M. **A. Jullien**, professeur de sciences à Sainte-Barbe.

Dans un très grand nombre de questions telles que les sections planes des cylindres et des cônes, les ombres portées, les voûtes en stéréotomie, etc., on a immédiatement deux diamètres conjugués d'une ellipse.

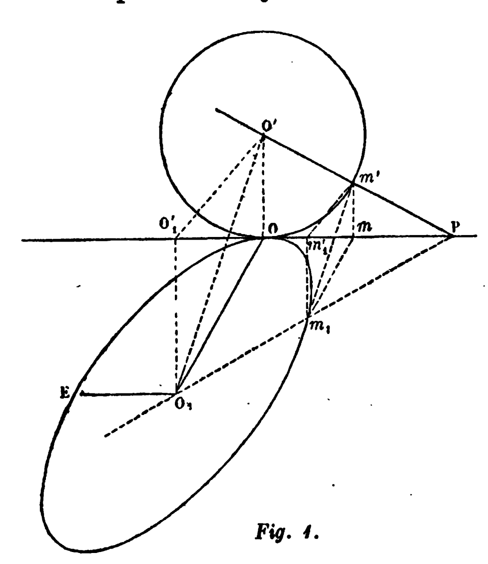


Fig. 1.

Nous nous proposons de montrer que, par des considérations purement géométriques, en considérant l'ellipse comme étant la projection oblique de l'ombre portée d'un cercle, on est conduit à la construction connue pour la détermination des axes en direction, et à une construction nouvelle pour celle des sommets.

Soit O′ *(fig. 1)* un cercle placé sur le plan vertical de projection, et tangent à la ligne de terre. Rappelons les con-

structions par lesquelles on obtient l'ombre portée d'un tel cercle sur le plan horizontal, quand on l'éclaire au moyen de rayons parallèles à une direction donnée OO_1, $O'O'_1$. On sait que cette ombre portée, ou projection oblique, est une ellipse qui a pour centre O_1, qui est tangente à la ligne de terre en O, et qui a pour diamètres conjugués la droite O_1O et une parallèle O_1E à la ligne de terre, égale au rayon du cercle.

Pour avoir l'ombre portée d'un point quelconque m de la circonférence, on peut déterminer la trace horizontale m_1 du rayon lumineux mm_1, $m'm'_1$, mené par m'; mais observons que, O_1P étant la projection oblique de la droite O'P qui passe par m', le point m_1 doit se trouver sur O_1P; observons, en outre, que les triangles $O_1\,OO'$, $m_1\,mm'$ sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, et que, par suite, les droites m_1m' et O_1O' sont parallèles. Si donc on prolonge $O'm'$ jusqu'en P, et si on joint O_1P, une parallèle à O_1O' menée par le point m' donnera m_1 sur PO_1.

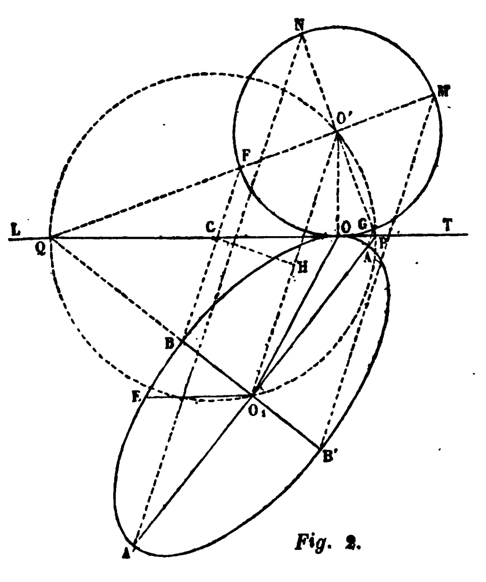


Fig. 2.

Chaque système de deux diamètres perpendiculaires du cercle fournit, en projection oblique, un système de deux diamètres conjugués de l'ellipse. On aura les axes de la courbe, en déterminant le système de deux diamètres du cercle qui se projette suivant deux droites perpendiculaires.

Décrivons un cercle (*fig. 2*) qui passe par les deux points O_1, O' et qui ait son centre C sur la ligne de terre; P et Q

étant les points où ce cercle et la ligne de terre se rencontrent, joignons les points O_1 et O' aux points P et Q. Les angles $PO'Q$ et PO_1Q sont droits comme inscrits dans une demi-circonférence; par conséquent les axes de l'ellipse sont les droites AA', BB', suivant lesquelles se projettent les diamètres GN, FM du cercle.

Actuellement, supposons qu'on nous donne deux diamètres conjugués O_1O et O_1E d'une ellipse et proposons-nous de déterminer ses axes en direction et en grandeur.

Axes en direction. — Par le point O, on mène une parallèle LT à O_1E; on élève à LT une perpendiculaire OO' égale à O_1E, puis on décrit un cercle ayant son centre sur LT et passant par O_1 et O'. Les droites O_1P et O_1Q, qui vont du point O_1 aux deux points P et Q_1 où le cercle coupe la ligne LT, donnent les directions des axes. Nous retrouvons ainsi la construction bien connue à laquelle conduit le théorème de Chasles sur les segments de la tangente parallèle à l'un des diamètres conjugués.

Axes en grandeur. — On décrit le cercle O' dont on a le centre et le rayon, on joint le point O' aux points P et Q, puis on mène des parallèles à la droite O_1 O' par les points où les droites O'P et O'A rencontrent la circonférence O'. Ces parallèles coupent les axes en des points qui sont les sommets.

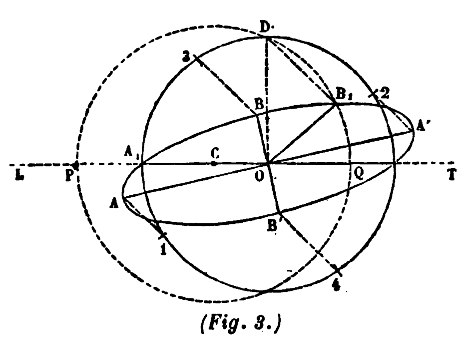
La construction que nous venons d'exposer et que nous fournit la considération de l'ellipse comme projection oblique du cercle, diffère essentiellement de celle qui est basée sur les théorèmes d'Apollonius. Elle présente, en outre, quelques *avantages graphiques*. On obtient, en effet, les quatre sommets à la fois par des parallèles faciles à mener, tandis qu'autrement on a bien les axes en grandeur, mais il faut encore les diviser en deux parties égales, ce qui exige huit arcs de cercle, puis porter les demi-axes sur les directions précédemment déterminées.

La construction suivante repose sur les mêmes considérations géométriques que celles qui précèdent, mais est plus avantageuse au *point de vue graphique*.

Soient OA_1 et OB_1 deux diamètres conjugués d'une ellipse

(*fig.* 3). Décrivons un cercle ayant O pour centre et OA_1 pour rayon. Ce cercle peut être considéré comme étant situé sur l'un des plans de projection ; l'ellipse devient alors sa projection oblique, son ombre portée, sa perspective cavalière, et notamment OB_1 est la projection oblique du rayon OD perpendiculaire au diamètre OA_1 que nous prenons pour ligne de terre.

Décrivons un cercle qui ait son centre C sur la ligne de terre et qui passe par D et B_1. Soient P et Q les points où ce cercle coupe la ligne de terre. Observons que l'angle droit PDQ se projetterait obliquement suivant un angle droit PB_1Q et que les diamètres du cercle O parallèles à PD et DQ auraient pour projections des diamètres de l'ellipse parallèles à PB_1 et B_1Q et, par suite, perpendiculaires entre eux.



(Fig. 3.)

Axes de l'ellipse en direction. — On mène par le point O des parallèles aux droites PB_1, B_1Q qu'il est d'ailleurs inutile de tracer sur l'épure.

Sommets de l'ellipse. — On détermine les points 1, 2, 3, 4 où la circonférence O est rencontrée par des parallèles aux droites PD, DQ menées par son centre. Des parallèles à DB_1 passant par ces points rencontrent les axes de l'ellipse aux sommets.

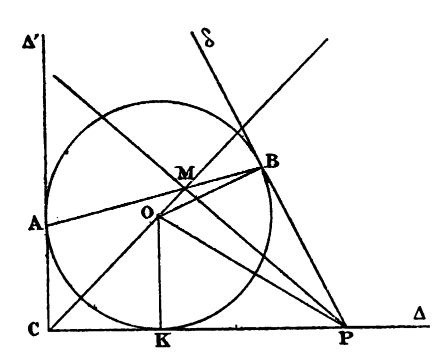
La considération du cercle dont une ellipse, donnée par deux diamètres conjugués, est la projection oblique, nous a conduit à la détermination des axes et des sommets. Elle permettrait de résoudre aussi facilement la plupart des problèmes qui se rapportent à l'ellipse : tracé de la courbe par points, tangentes, intersections, segments ou secteurs dans un rapport donné.

QUESTION 86

Solution par M. NAURA, élève au Collège de Vitry-le-François.

On considère deux droites rectangulaires Δ *et* Δ′ *et sur* Δ *on prend un point fixe* P. *Par ce point* P *on fait passer une transversale mobile* δ *qui forme avec* Δ *et* Δ′ *un triangle rectangle. Imaginons maintenant le cercle inscrit et soit* A *le point de contact de ce cercle avec* Δ′ *et* B *son point de contact avec* δ. *Démontrer que la droite* AB *passe par un point fixe.*

La droite AB coupe la bissectrice de l'angle C en M. Nous pouvons déterminer ce point A qui est indépendant de la direction de la droite δ. Menons les rayons de contact OK, OB et joignons MK. Les angles COP et MBP étant égaux comme ayant mêmes mesures, car l'arc intercepté par l'angle au centre COP est évidemment la moitié de l'arc AKB, le quadrilatère MBPO est inscriptible. Comme dans ce quadrilatère l'angle OBP est droit, il en est de même de l'angle OMP. M est donc la projection de P sur CO. Ce point étant indépendant de la position de δ, toutes les cordes AB y passent.

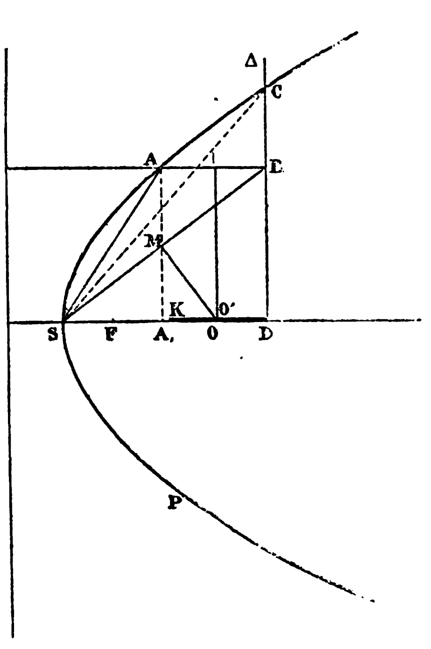


NOTA. — La même question a été résolue par M. Aubry, à Charleville.

QUESTION 87

Solution par D. Bablon, élève au Collège d'Épinal.

On considère une parabole P, *et une droite* Δ *perpendiculaire à l'axe de cette parabole et située à une distance du sommet* S *égale au double du paramètre; une parallèle à l'axe rencontre* P *au point* A *et* Δ *au point* B. *Trouver le lieu du centre des cercles circonscrits au triangle* SAB *quand cette parallèle se déplace. On suppose pour bien fixer la position de la droite* Δ, *que cette droite rencontre réellement la parabole.*



Le centre de la circonférence circonscrite au triangle SAB se trouve à la rencontre des perpendiculaires élevées aux milieux de deux côtés du triangle. Soient O et O' les points où ces perpendiculaires rencontrent l'axe de la parabole.

Les deux triangles OMS et SBD donnent

$$\frac{OS}{SB} = \frac{SM}{SD}$$

ou

$$\frac{OS}{SB} = \frac{\frac{SB}{2}}{2p}$$

p désignant le paramètre de la parabole;

ou $$OS = \frac{\overline{SB}^2}{4p} = \frac{\overline{BD}^2 + SD^2}{4p} = \frac{\overline{BD}^2 + 4p^2}{4p}.$$

Mais $$\overline{BD}^2 = \overline{AA'}^2 = 2p.A_1S$$

d'après la formule de la parabole ; donc

$$OS = \frac{2p.A_1S + 4p^2}{4p} = p + \frac{A_1S}{2}$$

Mais, d'autre part,

$$SO' = SD - O'D = 2p - \frac{AB}{2} = 2p - \frac{2p - SA_1}{2}.$$

ou $$SO' = p + \frac{A_1S}{2};$$

donc $$SO = SO' = p + \frac{A_1S}{2}.$$

Le centre de la circonférence circonscrite à SAB est donc sur l'axe. L'axe est donc le lieu cherché.

Nota. — La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Kéruzoret ; Taratte, à Évreux.

QUESTION 91

Solution par M. Ferdinand Taratte, élève au Lycée d'Évreux.

On considère des paraboles P *ayant pour sommet un point fixe* O *et passant aussi par un autre point fixe* A. *1° Les tangentes à* P *aux points* O *et* A *se coupent en un point* I, *trouver le lieu de ce point; 2° la tangente au point* A *et l'axe de la parabole se coupent en un point* I', *trouver le lieu de ce point. On déterminera ces deux lieux par des considérations purement géométriques.* (École centrale, 1879.)

1° On sait que I est le milieu de AI'. Donc si par ce point je mène une parallèle à l'axe, elle passera par I, milieu de AO, et on voit que le lieu de I est la circonférence décrite sur OE comme diamètre.

2° Par I' je mène une parallèle à la tangente en O et je prolonge AO, en F, j'aurai AO, = FO car AI = II' : donc le lieu du point I' est une circonférence décrite sur FO = AO comme diamètre.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Giat, Julien Sauve, à Moulins; Naura, à Vitry-le-François; Gindre, à Pontarlier; Joseph Taratte, à Saint-Louis; Berdon, Hugon, à Cluny; de Kerdrel, à Kéruzoret; Bablon, à Épinal; Aubry, à Charleville; J. Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg.

QUESTION 92

Solution par M. NAURA, élève au Collège de Vitry-le-François.

Déterminer les côtés d'un triangle connaissant a *et sachant que* a, b, c *et* h_a *sont en progression géométrique* (h_a *est la hauteur abaissée sur* a).

De la progression géométrique on déduit

$$b^2 = ac \qquad (1)$$

et

$$bc = ah_a. \qquad (2)$$

La dernière relation prouve que le triangle est rectangle, on a donc

$$b^2 + c^2 = a^2. \qquad (3)$$

De (1) et (3) on déduit

$$c^2 + ac - a^2 = 0,$$

d'où

$$c = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

après avoir rejeté la racine négative

et

$$b = \sqrt{ac} = a\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question MM. de Kerdrel, à Kéruzoret; F. Taratte, à Évreux.

QUESTION 93

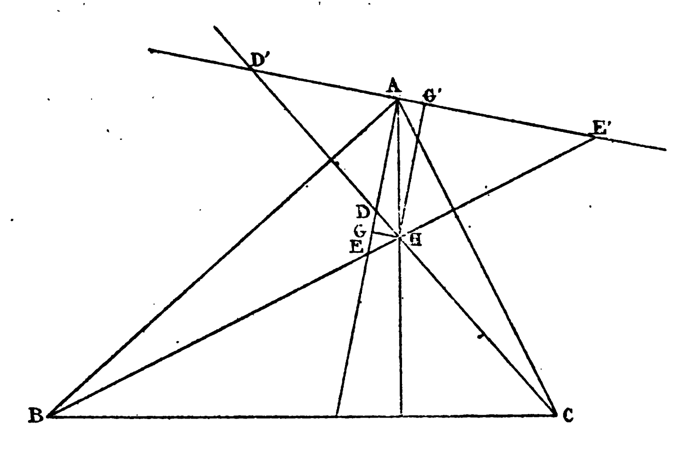
Solution par M. AMAURY DE KERDREL.

Construire un triangle ABC *connaissant la différence des angles* B *et* C *et les portions de la bissectrice intérieure de l'angle* A *et de la bissectrice extérieure du même angle comprises entre les hauteurs partant de* B *et de* C.

Supposons le problème résolu; soit H le point de concours des hauteurs; DE, D'E' les deux portions de bissectrices. Les deux triangles HDE, HD'E' sont isoscèles, car

$$DEH = EDH = 90 - \frac{A}{2}$$

$$HD'E' = HE'D' = \frac{A}{2}.$$



Soient G et G' les milieux de DE et de D'E', les triangles HD'G', HDG sont semblables et

$$\frac{HG}{\frac{DE}{2}} = \frac{\frac{D'E'}{2}}{HG'}$$

d'où
$$HG \times HG' = \frac{DE \times DE'}{4}.$$

Le produit GA × GH est donc connu. D'ailleurs, l'angle GAH, angle de la bissectrice et de la hauteur, est égal à la demi-différence des angles à la base. On est donc ramené à construire le triangle rectangle AGH, dans lequel on connaît les angles et le produit des côtés de l'angle droit ; ce problème se résout facilement, car

$$AH^2 = \frac{GA \times GH}{\sin\alpha \cos\alpha} = \left(\frac{DE}{2\sin\alpha}\right) \times \left(\frac{D'E'}{2\cos\alpha}\right)$$

AH se construira donc par une moyenne proportionnelle ; le triangle étant connu, le reste de la construction s'achèvera aisément.

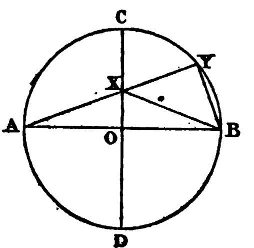
NOTA. — La même question a été résolue par M. F. Taratte, élève au lycée d'Évreux.

QUESTION 97

Solution par M. F. TARATTE, élève au lycée d'Évreux.

Dans un cercle dont le centre est o, *on mène deux diamètres rectangulaires* AB *et* CD ; *on demande de mener par le point* A *une corde* Ay *qui coupe la ligne* Co *au point* x *et la circonférence au point* y, *de manière que l'on ait* Ax.ox = Cx.xy

(Reidt.)



Soit Ay la corde demandée. J'aurai

alors $$\frac{Ax}{Cx} = \frac{xy}{ox},$$

d'où $$\frac{Ay}{Ao} = \frac{xy}{ox}$$

ou encore $$\frac{ox}{Ao} = \frac{xy}{Ay};$$

mais dans les deux triangles rectangles Axo et AyB j'ai

$$\frac{ox}{Ao} = \frac{yB}{Ay}$$

donc $xy = yB$, et par suite yxB vaut 45°. Le triangle AxB étant aussi isoscèle, il en résulte que l'angle yAB vaut la moitié de 45°, et par suite le point y est le milieu de l'arc BC.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Youssoufian, à Constantinople; Caitucoli, à Draguignan; Naura, à Vitry-le-François; Voignier, à Commercy.

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE FORESTIÈRE (1883)

Étant donné tg $\frac{x}{2} = b$, calculer sin x et cos x ; dire *à priori* combien on trouvera de valeurs pour sin x et pour cos x.

— Déterminer la plus petite valeur que pourra prendre l'expression $(x - 1)^2 + (2x + 1)^2$.

— Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Construire la courbe représentative de cette variation.

— On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, et sur Ox un point F d'abscisse a ; ce point est le foyer d'une parabole dont Oy est la directrice ; trouver l'équation de la parabole, son intersection avec une parallèle à l'axe, et la tangente au point trouvé.

— On donne un plan incliné ; en un point A de ce plan, une tige fixe AB perpendiculaire au plan. Un fil attaché en B est fixé, à son autre extrémité, à la surface d'une sphère. On demande quelle doit être la position de la sphère sur le plan pour qu'il y ait équilibre. Trouver la tension du fil.

— Un mobile se meut sur une droite AB, et est constamment attiré par un point I suivant une force mesurée par la distance du point I au mobile. Comment pourra-t-on évaluer le travail de la force ?

— On donne deux axes rectangulaires ; on prend une droite OID, dont I est le milieu ; sur Oy, on prend OB = OI ; trouver les équations des médianes du triangle BID.

— Former l'équation du troisième degré qui admet pour racines 2, 4 et 8.

— On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy ; on demande l'équation du cercle de rayon R tangent à Oy, et ayant son centre sur Ox. On prolonge toutes les droites

issues de O, telles que OM d'une quantité constante MB = R; trouver le lieu décrit par le point B.

— Calculer la vitesse d'un mouvement, sachant que l'espace est donné par la formule

$$e = a \sin t.$$

— Trouver le rectangle de périmètre maximum ou minimum inscrit dans un demi-cercle.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx.$$

— On a une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires; par les extrémités on mène des perpendiculaires aux axes. Trouver l'équation du lieu du point de rencontre de ces perpendiculaires.

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE NAVALE (1883)

Construire $x + y = a$; $x^2 + y^2 = m^2$.

— Centre de gravité du tronc de pyramide triangulaire, ou du tronc de cône à bases parallèles.

— Étant donnés deux points A et B d'un plan, et un certain nombre de forces dans ce plan, soit m^2 la somme des moments par rapport à A, K^2 la somme des moments par rapport à B: la somme des projections des forces sur AB est nulle. Que peut-on en conclure?

— Lorsque des forces situées dans un plan sont telles que la somme de leurs moments, prise par rapport à trois points du plan est nulle pour chaque point, il y a équilibre.

— Trouver l'angle de la ligne de terre et d'un plan dont les traces sont en ligne droite.

— Soit BD une droite donnée; on prend un point C sur cette droite; sur BC comme côté on construit un triangle équilatéral; sur CD on construit un carré. Trouver la position du point C pour laquelle la somme des surfaces de ces deux polygones est minima.

— On donne une série de forces dans un plan, et deux

points du plan. La somme des moments par rapport à chaque point est nulle, et il en est de même de la somme des projections des forces sur la droite qui joint les points. Que doit-on en conclure?

— Trouver le reste de la division du polygone entier $f(x)$ par $(x - \alpha)(x - \beta)$ sans effectuer la division. Appliquer au cas suivant

$$f(x) = 5x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 3x - 5;$$
$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + 4x - 21.$$

— Dans un triangle équilatéral de côté a, inscrire un autre triangle équilatéral de côté m.

— Inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle de telle sorte que le volume qu'il engendre en tournant autour de sa base soit maximum.

— Lieu des pôles des grands cercles qui font un angle donné avec un grand cercle donné.

— Mener par un point pris sur une sphère un grand cercle tangent à un petit cercle donné.

— De combien de manières peut-on décomposer un nombre en un produit de deux facteurs? — En un produit de deux facteurs premiers entre eux?

— Résoudre

$$m \sin(a + x) = p \sin(b - x).$$

— Quelles conditions doivent remplir les termes de la fraction $\frac{a}{b}$, pour que sa racine à moins de $\frac{1}{b}$ près soit $\frac{a}{b}$?

— Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, en considérant $bx + c$ comme les deux premiers termes d'un carré.

— On donne la série

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36. . . .

Trouver la somme des n premiers termes.

— Couper une sphère par un plan de façon que le cône, ayant pour sommet le centre de la sphère et pour base la section, ait le même volume que le segment sphérique de même base.

— Démontrer que les volumes de deux pyramides qui ont un angle solide commun sont entre eux comme les produits des trois arêtes de cet angle solide.

— Rendre calculable par logarithmes séc a — séc b.

— Inscrire dans un demi-cercle un rectangle de périmètre donné.

— Étant donné un rectangle, former avec ce rectangle une boîte ouverte de volume maximum, en enlevant des carrés égaux aux quatre angles, et relevant les petits rectangles ainsi déterminés.

— Construire les lignes x et y, sachant que l'on a

$$x + y = a; \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{p}{q}.$$

— On donne un triangle; déterminer un point sur la base, tel que, si l'on mène par ce point des parallèles aux deux côtés, le parallélogramme ainsi formé ait une aire équivalente à la moitié du triangle donné.

— On donne dans un plan deux points A et B, et une série de forces. La somme des moments par rapport à A et à B a pour valeur K^2 pour chacun des points; la somme des projections sur AB est égale à m. Que peut-on conclure de ces données?

— Parmi tous les rectangles de même surface, quel est celui qui est inscrit dans le plus petit cercle?

— Parmi tous les cylindres de même volume, quel est celui qui est inscrit dans la plus petite sphère?

— Résoudre $tg\, x = \cos x$.

— Variations de la fonction $y = \dfrac{x}{\sin x}$.

— Trouver sur la sphère le lieu des points également distants de deux grands cercles donnés.

— Quelle est la condition pour que trois nombres donnés soient les termes de rangs m, n, p d'une progression géométrique?

— Construire un triangle connaissant a, h_a et $b^2 + c^2 = m^2$.

— Construire $\dfrac{x}{c} = \dfrac{a^3}{b^3}$.

— Rendre calculable par logarithmes

$$y = m \sin \alpha + n \cos \alpha.$$

— Mener dans un cercle une corde telle que la somme de cette corde et de sa distance au centre soit maxima.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

— On donne le demi-cercle AOB, et le point C tel que OC $= a$; ce point est sur le diamètre AB. Mener la droite CD telle que les volumes engendrés par les contours mixtilignes AMDC et CDMB en tournant autour de AB soient égaux.

— Deux circonférences se coupent; par le point commun B, on mène une sécante CBD. Trouver le produit $BC \times BD$. Discussion.

— On donne une sphère. Circonscrire à cette sphère un cône tel que sa surface latérale soit à la surface de la zone interceptée, dans un rapport donné.

— Lieu géométrique des pôles des grands cercles tangents à un petit cercle donné.

— Deux courriers partent des points A et B, distants de 105 kilomètres; en allant à la rencontre l'un de l'autre, ils se rencontrent au bout de 6 heures; s'ils avaient marché dans le même sens, ils se seraient rencontrés au bout de 39 heures. Trouver la vitesse de chaque mobile.

— Inscrire dans une sphère le cône de surface totale — ou de volume — maximum.

— Maximum ou minimum de $x^p + \frac{1}{x^q}$.

— Étant donné un triangle ABC, trouver sur la base un point M tel que, menant par ce point les parallèles MD, ME à AB et AC, on ait

$$\frac{S \cdot BME}{S \cdot CMD} = \frac{m}{n}.$$

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

CONCOURS DE 1883

Algèbre et Trigonométrie.

Vérifier l'égalité

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2} = 1 + 2x\cos\alpha + 2x^2\cos 2\alpha + 2x^3\cos 3\alpha + \ldots$$

Employer la série pour calculer la valeur du premier membre en faisant

$$x = 0,127; \quad \alpha = 6^0.$$

Combien de termes faut-il prendre pour que l'erreur commise en négligeant les termes suivants soit moindre que 0,001.

Géométrie descriptive.

Étant donné un cône à base elliptique, et un point pris sur le plan de la base à l'intérieur de l'ellipse, couper ce cône par un plan suivant une courbe ayant son centre en ce point.

On construira la projection de cette courbe sur le plan de la base.

Mécanique.

Expression du travail moteur nécessaire pour entretenir le mouvement d'un convoi, à une vitesse donnée, sur un chemin de fer rectiligne de pente donnée.

ÉPREUVES PRATIQUES

Géométrie descriptive (durée 3 heures 1/2).

Faire la perspective d'une voûte d'arêtes.

On prendra pour plan du tableau la face antérieure; le point de vue est situé sur l'axe vertical de l'appareil, à une hauteur convenable, et le point de distance est pris à volonté.

Calcul topographique (durée 3 heures).

Un observateur, pour déterminer sa position D sur le terrain dont il a la carte, a mesuré les différences d'azimuth de trois points A, B, C, marqués sur la carte. Les coordonnées de ces points, relevées sur la carte, sont

A	dist. à la mérid.	200	dist. à la perp.	600
B	—	650	—	700
C	—	900	—	400

Les angles mesurés en D, sont

$$ADB = 85^o\ 2', 1;$$
$$BDC = 56^o\ 18', 6.$$

On demande les coordonnées du point D.

Mécanique.

Lever de machine à l'usine (durée 4 heures).
Rendu à la salle de dessin (durée 3 heures).

QUESTIONS PROPOSÉES

108. — On considère un angle droit yox, et un cercle Δ inscrit dans cet angle. Par le point o, on mène une transversale δ, qui rencontre Δ aux points A et B; on projette alors les points A et B sur ox, en A′ et B′, puis sur oy, en A″ et B″. Ceci fait, sur A′B′ on décrit un demi-cercle Δ', et sur A″B″ un demi-cercle Δ'', et par le point o, on mène à Δ' une tangente oP, et à Δ'' une tangente oQ; enfin, on rabat oP sur ox, en oP′; et oQ sur oy, en oQ″. Les parallèles aux droites ox et oy menées par les points Q′ et P′ se coupent en un point I, dont on demande le lieu lorsque δ tourne autour du point o. *(G. L.)*

109. — On considère une suite de termes

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \dots u_{2n-1}, u_{2n}$$

qui jouissent de cette propriété que si l'on considère quatre termes consécutifs dans cette suite, le produit des extrêmes

soit égal au produit des moyens. On donne les trois premiers termes u_1, u_2, u_3, et l'on demande de trouver la somme S_{2n} des $2n$ premiers termes. On supposera que u_3 est un nombre différent de u_1. *(G. L.)*

110.— Soient u_1, u_2, $u_3 \ldots u_n$ des nombres tels que l'un quelconque d'entre eux soit égal au produit des deux nombres précédents. Démontrer que, en désignant par P_n le produit de ces nombres, on a

$$P_n = u_2 P_{n-1} P_{n-2} ;$$

les nombres u_1 et u_2 sont supposés quelconques. *(G. L.)*

111. — On considère un angle droit yOx, et un point A dans l'intérieur de cet angle; par le point A passent deux cercles Δ et δ tangents aux droites Ox et Oy ; soient P, Q leurs points de contact avec Ox ; R, S leurs points de contact avec Oy.— 1° Démontrer que les cercles APQ, ARS sont tangents au point A ; — 2° démontrer qu'ils sont égaux ; — 3° reconnaître que ces cercles sont vus du point O, l'un et l'autre, sous un angle droit ; — 4° la droite OA rencontre le cercle δ en un point B, différent de A ; par B passent deux cercles inscrits dans l'angle yOx, savoir δ et une autre circonférence δ'. Démontrer que le cercle δ est moyen géométrique entre δ' et Δ ; — 5° du cercle Δ, on peut déduire par la construction citée plus haut une infinité de cercles Δ_1, $\Delta_2, \ldots$ inscrits dans l'angle yOx, et dont les rayons, d'après la remarque 4, sont en progression géométrique. A ces cercles Δ_1, $\Delta_2 \ldots$ correspondent des cercles tels que les cercles APQ, définis tout à l'heure. On obtient ainsi une infinité de cercles U_1, U_2 et l'on propose de démontrer que les rayons de ces cercles sont aussi les termes d'une progression géométrique. *(G. L.)*

112. — On considère deux cercles concentriques Δ et Δ', ayant pour centre commun O'. On mène une tangente AB à Δ', rencontrant Δ en A et B, et touchant Δ' en O. Un diamètre rencontre Δ en C et D, et Δ' en C' et D'. On mène OC' et OD' ; ces lignes rencontrent AC aux points I, I', et BD en I'', I'''. 1° Chacun des points I, I', I'', I''' décrit un cercle

quand CD tourne autour de O'; — 2° le milieu de AC coïncide avec le milieu de II'; — 3° les triangles IOI', I'OI''' sont équivalents; — 4° le maximum de la surface de ce triangle a lieu quand CD est parallèle à AB; — 5° les points I, I,' I'', I''' sont sur un cercle concentrique à Δ. Ce cercle est maximum quand CD est parallèle à AB.

(G. L.)

113.— On considère un cercle C, et un point P dans son plan. Soit Δ une droite partant de P, et rencontrant C aux points A et B ; on mène les tangentes à C en ces points, et l'on prend le point Q symétrique de P par rapport au milieu de AB. Démontrer que O étant le centre de C, la perpendiculaire élevée à la droite OQ au point Q est partagée par ce point et les tangentes citées plus haut en deux parties égales.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 20642-3

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir page 217.)

V

On a un triangle ABC *et un point* M *dans son plan; on mène par* M *une sécante qui coupe respectivement les côtés* BC, AC, AB *en* A', B', C'; *soient* α, β, γ *les symétriques de* A', B', C' *par rapport à* M. *Démontrer que les trois droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *se coupent au même point.*

Soient a_1, b_1, c_1 les points où $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ coupent les côtés BC, AC, AB; soient a, b, c les longueurs de ces côtés.

Les triangles B'CA', C'BA' coupés par la transversale $A\alpha$ donnent

$$\frac{\alpha B'}{\alpha A'} \cdot \frac{AC}{AB'} \cdot \frac{a_1A'}{a_1C} = 1$$

$$\frac{\alpha A'}{\alpha C'} \cdot \frac{AC'}{AB} \cdot \frac{a_1B}{a_1A'} = 1$$

ou en multipliant membre à membre et réduisant

$$\frac{\alpha B'}{\alpha C'} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{a_1B}{a_1C} = 1\,;$$

on a de même

$$\frac{\beta C'}{\beta A'} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{b_1C}{b_1A} = 1$$

$$\frac{\gamma A'}{\gamma B'} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{CB'}{CA'} \cdot \frac{c_1A}{c_1B} = 1$$

multipliant membre à membre en remarquant :

1° Que le produit des trois premières fractions est identiquement l'unité puisque (à cause de la symétrie par rapport à M des points A' et α, B' et β, C' et γ) l'on a

$$\alpha B' = \beta A', \quad \beta C' = B'\gamma, \quad \gamma A' = \alpha C';$$

2° Que le produit des trois deuxièmes fractions est l'unité identiquement;

3° Que le produit des trois troisièmes fractions est aussi

l'unité, puis queles trois points A', B', C' sont en ligne droite; il reste

$$\frac{a_1B}{a_1C} \cdot \frac{b_1C}{b_1A} \cdot \frac{c_1A}{c_1B} = 1.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

VI

D'un point K *appartenant à l'axe radical de deux circonférences de centres* O *et* O' *je mène deux tangentes* KA, KA' *à ces circonférences,* A *et* A' *étant respectivement les points de contact sur* O *et sur* O'. *Les droites* OA, O'A' *se coupent en* M. *Trouver le lieu de* M *quand* K *parcourt l'axe radical.*

Les deux triangles rectangles KMA, KMA' sont égaux, puisqu'ils ont l'hypoténuse KM commune, et que les côtés KA et KA' sont égaux comme tangentes partant de l'axe radical; donc

$$MA = MA',$$

alors

$$MO - MO' = OA - O'A' = \text{constante}.$$

Le lieu de M est donc l'hyperbole qui a pour foyers O et O', et dont l'axe transverse a pour longueur la différence des rayons de deux circonférences.

VII

Par un point O *du plan du triangle* ABC *je mène les droites* A_bA_c, B_cB_a, C_bC_a *respectivement parallèles à* CB, CA, AB *et terminées aux côtés du triangle.*

Déterminer le point O *de façon que la somme*

$$\overline{A_cA_b}^2 + \overline{B_aB_c}^2 + \overline{C_aC_b}^2$$

soit minima.

Supposons que A_cA_b ait une longueur p. Cherchons sur A_cA_b le point O tel que la somme $\overline{C_aC_b}^2 + \overline{B_aB_c}^2$ soit minima.

Soit

$$B_aB_c = q,$$
$$C_aC_b = r,$$

il est facile de démontrer la relation très connue

$$\frac{A_cA_b}{BC} + \frac{B_aB_c}{AC} + \frac{C_aC_b}{AB} = 2.$$

On a donc $$\frac{q}{b} + \frac{r}{c} = \frac{2a - p}{a}$$

et $$q^2 + r^2 = K^2;$$

d'où

$$\left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{b^2 + c^2}{b^2} - 2\left(\frac{r}{c}\right)\frac{2a - p}{a} + \frac{(2a - p)^2}{a^2} - \frac{K^2}{b^2} = 0.$$

La condition de réalité de $\frac{r}{c}$ donne

$$K^2 > \frac{b^2c^2(2a - p)}{a^2(b^2 + c^2)};$$

d'où le minimum de K^2 est

$$\frac{b^2c^2(2a - p)}{a^2(b^2 + c^2)}.$$

A cette valeur correspondent pour q et r les valeurs

$$q = \frac{(2a - p)c^2b}{a(b^2 + c^2)},$$

$$r = \frac{(2a - p)b^2c}{a(b^2 + c^2)},$$

d'où l'on conclut $$qb = cr.$$

Il est donc évident que pour le point qui correspond au minimum de $\overline{A_cA_b}^2 + \overline{B_aB_c}^2 + \overline{C_aC_b}^2$

on a $$pa = qb = rc.$$

Ce qui, joint à l'équation

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} = 2,$$

détermine les valeurs cherchées

$$p = b.c.\frac{2\,abc}{c^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2},$$

$$q = a.c.\frac{2\,abc}{c^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2},$$

$$r = a.b.\frac{2\,abc}{c^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2}.$$

Nous ajoutons, sans en donner ici la démonstration, que *le lieu des points* O *pour lesquels la somme* $p^2 + q^2 + r^2$ *a une*

valeur donnée est une conique qui a pour centre le point pour lequel $p^2 + q^2 + r^2$ *est minimum.*

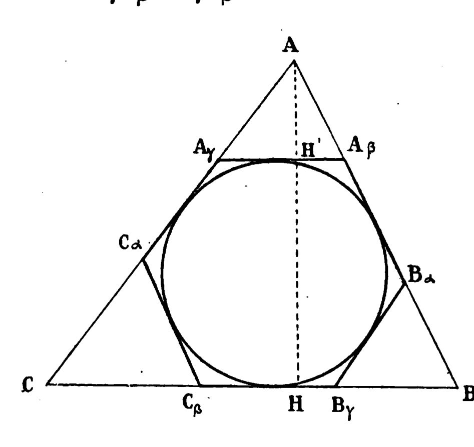
Nous laissons le soin de démontrer que *si l'on cherche sur toutes les droites* $A_c A_b$ *les points* O *pour lesquels* $q^2 + r^2$ *est minimum, le lieu de ces points est une droite qui passe par le pied de la médiane antiparallèle partant de* A.

Enfin nous engageons le lecteur à étudier la variation de la fonction $p^2 + q^2 - r^2$ qui présente des particularités intéressantes.

VIII

Construire un hexagone circonscriptible à un cercle. On sait que les côtés opposés sont parallèles, et l'on connait trois côtés non consécutifs.

Soit $A_\gamma A_\beta B_\alpha B_\gamma C_\beta C_\alpha$ cet hexagone.



Soient

$$A_\gamma A_\beta = l,$$
$$B_\alpha B_\gamma = m,$$
$$C_\beta C_\alpha = n,$$

les trois côtés donnés.

On démontre facilement que les côtés parallèles de l'hexagone sont égaux; cela posé, prolongeons les trois autres côtés jusqu'à ce que par leur rencontre ils forment le triangle ABC.

Soit x, y, z les trois côtés CB, AC, AB de ce triangle, H le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur CB, H' le point où cette perpendiculaire coupe $A_\gamma A_\beta$; on a, en appelant r le rayon du cercle inscrit dans l'hexagone, p le 1/2 périmètre du triangle ABC, et S sa surface :

$$\frac{A_\gamma A_\beta}{CB} = \frac{AH'}{AH} \text{ ou } \frac{l}{x} = \frac{AH - 2r}{AH}$$

ou $$\frac{l}{x} = \frac{\frac{2S}{x} - \frac{2S}{p}}{\frac{2S}{x}} = \frac{p-x}{p};$$

d'où enfin $$l = \frac{x(p-x)}{p}.$$

Ce que l'on peut écrire
$$x^2 - px + pl = 0.$$
On a de même
$$y^2 - py + pm = 0$$
$$z^2 - pz + pn = 0$$

On tire de là
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4pl}}{2} \\ y &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4pm}}{2} \\ z &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4pn}}{2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ajoutant et remarquant que $x + y + z = 2p$, il vient
$$p = \pm\sqrt{p^2 - 4pl} \pm \sqrt{p^2 - 4pm} \pm \sqrt{p^2 - 4pn}$$
en résolvant cette équation on trouve
$$2p = \frac{(l^2 + m^2 + n^2 - 2mn - 2ln - 2lm)^2}{(m+n-l)(l+n-m)(m+l-n)}.$$

Les formules (1) donnent alors la valeur de x, y, z puisque p est connu, et rien n'est plus simple que d'achever le problème.

Remarquons que dans les formules (1) le signe supérieur convient seul à la question; il suffit pour le reconnaître de les appliquer au cas où $l = m = n$, car alors évidemment l'hexagone est régulier
$$x = 3l, \quad p = \frac{9l}{2}$$
et l'on a identiquement
$$3l = \frac{\frac{9l}{2} + \sqrt{\frac{81l^2}{4} - 4\frac{9l}{2}.l}}{2}$$
avec le signe supérieur du radical.

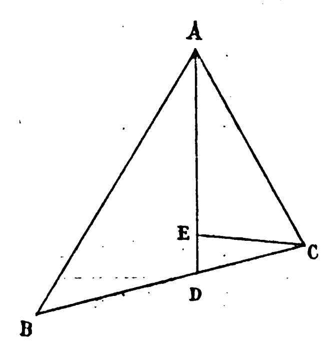
IX

Chacun connaît la démonstration de cette proposition: *La bissectrice de l'angle d'un triangle divise le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents.*

On la trouve démontrée d'une même façon dans tous les traités de Géométrie élémentaire.

M. Laisant m'a communiqué la démonstration suivante qui est peut-être, *pédagogiquement*, préférable.

Soit ABC le triangle, AD la bissectrice de l'angle CAB.



Je fais l'angle ACE = ABD.

Les deux triangles ACE, ABD ont deux angles égaux et sont semblables, donc

$$\frac{CE}{DB} = \frac{AC}{AB};$$

mais le triangle CED est isoscèle, car les angles CEA et CDE ont respectivement pour suppléments les angles égaux CEA et BDA; donc CE = CD et l'on a

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Démonstration analogue pour la bissectrice de l'angle extérieur.

X

Dans un triangle ABC *les deux droites* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ *de Simson relatives à deux points* M *et* M' *diamétralement opposés sont rectangulaires et se coupent sur le cercle des neuf points.*

On se rappelle que l'on appelle droite de Simson la ligne droite qui passe par les pieds des trois perpendiculaires abaissées sur les trois côtés, d'un point M du cercle circonscrit au triangle ABC.

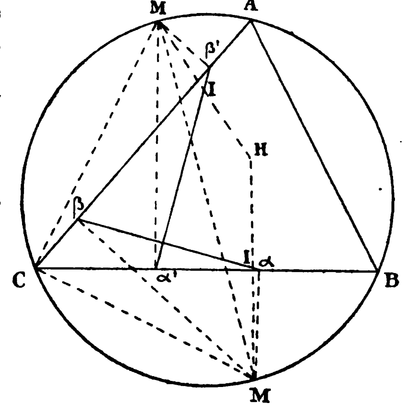
Soient M et M' les deux extrémités d'un diamètre du cercle circonscrit,

$M\alpha$, $M\beta$ les perpendiculaires abaissées de M sur CB et sur CA,

Mα', Mβ' les perpendiculaires abaissées de M' sur CB et sur CA,

K l'intersection de $\alpha\beta$ et de $\alpha'\beta'$;

Prolongeons M'α' jusqu'en J sur le cercle circonscrit; il est évident que JM est parallèle à CB puisque l'angle MJM' est droit. Joignons CM et CM' :



Le quadrilatère C$\alpha'\beta'$M' étant inscriptible on a

$$\alpha'\beta'C = JM'C = JMC;$$

mais M$\alpha\beta$C étant inscriptible, on a

$$K\beta\beta' = \alpha MC,$$

donc

$$\alpha'\beta'C + \beta'\beta K = JMC + CM\alpha = 90^\circ.$$

Donc le triangle $\beta K\beta'$ est rectangle en K. Ce qui démontre que les droites de Simson $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ sont rectangulaires.

Cela posé, si H est le point de concours des hauteurs de ABC, on sait que $\alpha\beta$ passe par le milieu I de MH et $\alpha'\beta'$ par le milieu I' de M'H.

Or comme le cercle des neuf points est aussi le lieu des points milieux des droites HM partant de H et allant à la circonférence circonscrite, I et I' sont des points du cercle des neuf points et des points diamétralement opposés de ce cercle.

L'angle I'KI étant droit, le point K appartient donc au cercle des neuf points.

C'est la solution géométrique de la question 1473 des *Nouvelles Annales des Mathématiques*. *(A suivre.)*

NOUVELLES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Par M. **H. Brocard** capitaine du génie.

I

Étant donné un point M du plan d'un triangle ABC, à ce point M correspond toujours un autre point M', qui est l'intersection des trois droites, respectivement symétriques des trois droites AM, BM, CM, par rapport aux bissectrices des angles A, B, C; c'est-à-dire que l'on a MAC = M'AB; MCB = M'CA ; MBA = M'BC.

Les deux points M, M' sont dits correspondants, ou réciproques (*).

Parmi les groupes de points de cette nature, il y a lieu de distinguer :

1° Les points segmentaires ω, ω' (ou points de Brocard), pour lesquels les angles ωAC, ωCB, ωBA, ω'AB, ω'BC, ω'CA sont égaux entre eux. On sait que, α désignant l'angle dont il vient d'être question, on a la relation

$$\cot g\, \alpha = \cot g\, A + \cot g\, B + \cot g\, C.$$

2° Le centre O du cercle circonscrit au triangle, et le point H de rencontre des hauteurs.

3° Le centre de gravité E du triangle ABC, et le centre K des médianes antiparallèles (ou point de Grebe).

4° Le point D, centre d'homologie de ABC et du triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont aux points de rencontre des droites ωB, ω'C ; ωC, ω'A ; ωA, ω'B; et le point D', pôle de la droite $\omega\omega'$ dans la circonférence des sept points (cercle de Brocard), décrite sur la ligne OK pour diamètre.

5° Le centre I du cercle inscrit est à lui-même son propre correspondant; il en est de même du centre de chacun des cercles ex-inscrits.

(*) Nous avons vu précédemment (p. 100) que ces points avaient été signalés d'abord par le capitaine Mathieu *(Nouv. Ann. 1865)*. (A. M.)

Nous considérerons encore parmi les points correspondants : le milieu S de $\omega\omega'$ et son correspondant S' ;

Le centre Z du cercle de Brocard (milieu de OK), et son correspondant Z'.

II

Cela posé, voici divers systèmes de trois points en ligne droite :

1° O, E, H ; de plus OE = 2EH. Cette propriété a déjà été signalée par Euler ;

2° D, E, S ; on a DE = 2ES.

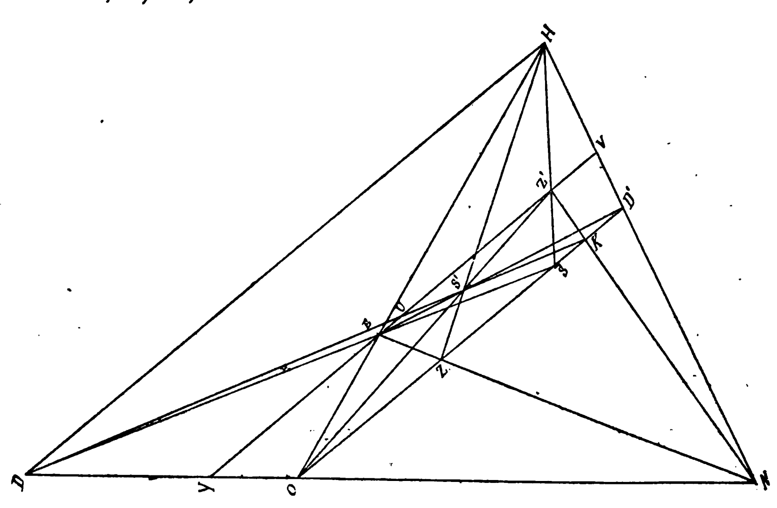
3° D, K, S' ;

4° E, S', D' ;

5° O, S', Z' ;

6° S, Z', H ; on a Z'H = 2SZ' ;

7° Z, S', H ;



Enfin, si N est une des extrémités du diamètre OD du cercle circonscrit, voici trois autres systèmes de trois points en ligne droite :

8° H, D', N ;

9° Z', K, N ;

10° E, Z, N.

Il en résulte aussi que certains systèmes de droites forment des droites concourantes. Ainsi

1. Le point S′ se trouve sur les droites KD, ED′, ZH.
2. Le point Z′ se trouve sur les droites KN, OS′, SH.
3. Le point N se trouve sur les droites OD, EZ, KZ′, D′H.

III

Les distances de la plupart des points désignés dans ce qui précède aux côtés du triangle s'expriment assez simplement en fonction des longueurs des trois côtés ou des lignes trigonométriques des angles du triangle.

Les distances de deux points correspondants aux trois côtés sont inversement proportionnelles entre elles.

En effet, soient λ, μ, ν les distances d'un point aux côtés a, b, c du triangle. Ce point est à la rencontre de deux droites partant, par exemple, des sommets B et C; l'une de ces droites est définie par le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ des distances d'un de ses points aux côtés a et b; l'autre par le rapport $\frac{\lambda}{\nu}$ des distances d'un de ses points aux côtés a et c.

Or, par définition, le point correspondant sera à l'intersection de deux droites, également issues des points B et C; mais l'une d'elles aura pour rapport des distances d'un de ses points aux côtés a et b le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$; l'autre aura pour rapport des distances d'un de ses points aux côtés a et c le rapport $\frac{\nu}{\lambda}$.

Donc, on a d'une part les rapports

$$\frac{\delta_a}{\lambda} = \frac{\delta_b}{\mu} = \frac{\delta_c}{\nu},$$

et d'autre part les égalités

$$\delta'_a\lambda = \delta'_b\mu = \delta'_c\nu.$$

IV

On peut, d'une manière simple et générale, établir que trois points, liés à un triangle, sont en ligne droite.

En effet, lorsqu'un point est lié à un triangle, on peut toujours évaluer les distances de ce point aux trois côtés.

Soient d_a, d'_a, d''_a les trois distances de trois points au même côté a; si le rapport

$$\frac{d_a - d'_a}{d'_a - d''_a}$$

est indépendant du côté que l'on considère, les trois points sont en ligne droite.

En effet, soit ABC le triangle considéré. M, N, P les trois points. On a, par hypothèse,

$$\frac{d_a - d'_a}{d'_a - d''_a} = \frac{d_b - d'_b}{d'_b - d''_b}.$$

Si nous menons par les points des parallèles respectivement au côté a jusqu'à la rencontre avec le côté b, et des parallèles à b jusqu'à la rencontre avec a, les longueurs de ces lignes seront proportionnelles aux distances des mêmes points au côté b et au côté a (puisque ces lignes s'obtiendront en divisant les distances correspondantes par $\sin$ C). Par suite, nous aurons, entre les lignes nouvelles, une relation identique à celle que nous donne l'hypothèse, et l'on sait que, dans ce cas, les trois points sont en ligne droite.

La connaissance préalable d'un autre point sur le même alignement permettra de substituer ce nouveau point à l'un des points désignés, lorsque ses distances s'exprimeront beaucoup plus facilement.

Dans la pratique, on cherchera seulement si deux des différences $d_a - d'_a$, $d'_a - d''_a$, $d_a - d''_a$
sont dans un rapport constant; il sera inutile de le vérifier pour les autres distances. Cette condition est, en effet, nécessaire et suffisante.

Les projections des segments déterminés par les trois points se trouvent dans le même rapport que ces segments, et aussi que les différences que nous venons de considérer. On peut en déduire des relations métriques; généralement, ces dernières se présenteront, d'une façon presque intuitive, à la seule inspection des formules, comme on pourra le reconnaître dans quelques-uns des exemples donnés dans le cours de cette étude.

V

Soit M un point du plan dont les distances aux trois côtés du triangle sont proportionnelles à une fonction symétrique f des côtés a, b, c; P étant une constante, et T désignant la surface du triangle, les distances d_a, d_b, d_c du point M aux trois côtés s'exprimeront par des relations de la forme

$$\frac{d_a}{f_a} = \frac{d_b}{f_b} = \frac{d_c}{f_c} = \rho.$$

$$2T = ad_a + bd_b + cd_c = \rho(af_a + bf_b + cf_c),$$

relations qui déterminent ρ et d_a, d_b, d_c.

De même, pour le point correspondant M', résultant de l'intersection des droites AM', BM', CM', symétriques des droites AM, BM, CM par rapport aux bissectrices, on aura

$$d'_a f_a = d'_b f_b = d'_c f_c = \rho'$$

$$2T = ad'_a + bd'_b + cd'_c = \rho'\left(\frac{a}{f_a} + \frac{b}{f_b} + \frac{c}{f_c}\right),$$

relations qui déterminent ρ' et d'_a, d'_b, d'_c.

Le plus souvent, on connaîtra d'avance la fonction f pour l'un des points M ou M'.

Pour abréger l'écriture, nous emploierons les notations suivantes :

$$a + b + c = 2P;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2;$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = n^4;$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = p^4;$$

on en tire

$$m^4 = p^4 + 2n^4.$$

(A suivre.)

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE SAINT-CYR (1883)

On donne deux circonférences tangentes extérieurement; leurs rayons sont R et r. Trouver l'angle des tangentes communes. Quelle est la condition pour que cet angle soit de 60°?

— Trouver la relation qui doit exister entre b et c pour que l'on ait $\dfrac{\sin^2 b}{\sin^2 c} = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$.

— On donne un demi-cercle AOB, on mène la tangente en B; mener la droite ACM rencontrant la circonférence en C et la tangente en M de façon que, si l'on fait tourner la figure autour de AB, on ait vol. ACB = vol. CMB.

— De tous les cylindres inscrits dans une sphère, quel est celui de surface totale maxima?

— Dans un rectangle ABCD, mener une ligne DM, rencontrant AB en M de façon que $DM^2 + MB^2 = K^2$.

— On a $\sin x = \frac{3}{5}$, $\sin y = \frac{4}{5}$. Démontrer que l'on a $x + y = 90°$.

— Un mobile pesant est lancé horizontalement avec une vitesse donnée. Trouver à un instant donné sa position et sa vitesse.

— Connaissant la corde d'un arc, trouver son sinus et son cosinus.

— Dans un triangle on a $b = \sqrt{2}$; $c = \sqrt{3}$; $C = 60°$. Calculer les éléments de ce triangle.

— Inscrire dans une sphère un cylindre tel que son volume soit égal à la somme des volumes des segments déterminés par les deux bases.

— Étant données trois forces appliquées aux sommets d'un triangle suivant les hauteurs issues de ces sommets, et proportionnelles aux côtés opposés, démontrer qu'il y a équilibre.

— On donne un rectangle ABCD; déterminer sur AB un point M tel que $DM^2 = AM.BM$.

— Lieu géométrique des points de l'espace dont la somme des carrés des distances à trois points fixes est constante.

— On prend deux plans inclinés ayant même hauteur OH et même sommet O. En O est une poulie sur laquelle passe un cordon terminé par deux poids P et P'; ces derniers reposent sur les plans inclinés. On demande les conditions d'équilibre. — Les deux poids étant en équilibre, démontrer que si on fait monter un des poids d'une certaine longueur sur l'un des plans, l'autre descendant de la même longueur sur l'autre plan, le centre de gravité du système ne change pas.

— Mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs

du premier degré le polynôme

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 - x - y - 1.$$

– Variation des racines de l'équation

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 7)x^2 + (\lambda - 1)x - 15 = 0,$$

quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Déterminer c dans l'équation $x^2 - 7x + c = 0$ de façon que l'on ait $x'^2 - x''^2 = 21$.

— Résoudre le système

$$x - y = 3xy; \quad x + y = 7xy.$$

— Trouver la fraction $\frac{x}{y}$, sachant que $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$, et $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$.

— Étant donné le demi-cercle MOP, mener la corde MN de telle façon que le volume engendré par le segment qu'elle détermine soit égal au volume du cône engendré par le triangle rectangle ONK (K étant la projection de N sur OM) lorsque la figure tourne autour de OM.

— On donne un triangle ABC, et un point O auquel est appliquée une force F perpendiculaire au plan du tableau. Décomposer cette force en trois autres appliquées en A,B,C, et parallèles à la première.

— On donne une barre indéfinie, avec une force appliquée en un point A, et verticale. On sait que l'unité de longueur de la barre, supposée prismatique et homogène, pèse a; dire où il faut couper la barre pour qu'il y ait équilibre, si l'on prend un point C comme point fixe sur la barre.

— Étant donnés un cercle et un point extérieur, mener par ce point une sécante telle que la corde soit une moyenne proportionnelle entre la sécante entière et la partie extérieure.

— Résoudre $x^y = y^x$; $x^a = y^b$.

— Trouver deux nombres tels que leur différence, leur somme et leur produit soient entre eux comme 2, 3, 5.

— Dans l'équation

$$x^2 + 4(p - 2)x + 3p^2 + 5 = 0,$$

déterminer p de façon que l'une des racines soit double de l'autre.

— Construire la ligne

$$x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + a^2b^2}}.$$

— On a trouvé le plus grand commun diviseur D de A et de B; trouver le plus grand commun diviseur de A et de A + B; de A + mB et de B; de A + mB et de A.

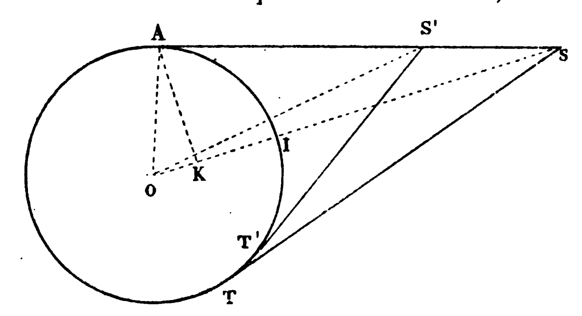
— Trouver pour $x = a$ la valeur de l'expression

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt[2]{x^2 - a^2} + x^3 - ax^2}.$$

QUESTION 33

Sur une tangente à la sphère O, *on prend deux points tels que* OS — OS′ *soit égal à* R. *Ces deux points sont les sommets de deux cônes circonscrits à la sphère. Déterminer la position des points* S *et* S′ *de façon que le volume compris entre les deux cônes et la sphère ait un volume donné.* (L. Lévy.)

Soient S et S′ les deux points cherchés. Si, du volume



ASTI, compris entre le premier cône et la sphère, je retranche le volume AST′I, compris entre le second cône et la sphère, j'aurai la quantité que je cherche à déterminer au moyen des quantités SO et S′O.

Soit x la longueur SO; je vais exprimer le volume ASTI au moyen de x. J'ai d'abord

Vol. ASTI = vol. AST — vol. sect. AITO;

ce qui donne

$$\text{Vol. ASTI} = \frac{1}{3}\pi x \,.\, \text{AK}^2 - \frac{2}{3}\pi \text{R}^2\,\text{IK}$$

$$= \frac{1}{3}\pi(\text{R} - \text{OK})[x(\text{R} + \text{OK}) - 2\text{R}^2].$$

Or, on sait que l'on a $\text{OK} = \frac{\text{R}^2}{x}$; donc après réductions faciles, on trouve

$$\text{Vol. ASTI} = \frac{1}{3}\pi \text{R}^2 \frac{(x - \text{R})^2}{x}.$$

On trouvera de même, en posant $\text{OS}' = y$,

$$\text{Vol. AS'T'I} = \frac{1}{3}\pi \text{R}^2 \frac{(y - \text{R})^2}{y};$$

donc il faut déterminer x et y de façon que l'expression

$$\frac{1}{3}\pi \text{R}^2 \left[\frac{(x - \text{R})^2}{x} - \frac{(y - \text{R})^2}{y}\right]$$

ait une valeur donnée, sachant que, entre x et y, on a la relation

$$x - y = \text{R}.$$

On en tire immédiatement, pour la valeur de l'expression cherchée, en fonction d'une seule inconnue :

$$\frac{1}{3}\pi \text{R}^2 \left[\frac{y^2}{(y + \text{R})} - \frac{(y - \text{R})^2}{y}\right].$$

Il suffit évidemment de déterminer la fonction entre crochets, de façon que cette fonction prenne une valeur Rl, telle que $\frac{1}{3}\pi \text{R}^3 l$ soit égal au volume donné.

On a donc, après réduction, à résoudre l'équation

$$\frac{y^2 + \text{R}y - \text{R}^2}{y^2 + \text{R}y} = l$$

ou

$$y^2(l - 1) + \text{R}y(l - 1) + \text{R}^2 = 0.$$

On voit immédiatement que, si le volume donné est plus petit que le quart de la sphère (auquel cas on a $l < 1$), les racines de cette équation sont réelles, l'une positive, l'autre négative ; or, dans le problème, y représente une quantité essentiellemement positive, puisque y est une longueur, qui doit être plus grande que R, le point S devant être extérieur à la sphère. Si l était plus grand que 1, les deux racines seraient négatives, dans le cas où elles seraient

réelles. On voit donc que le volume compris entre les deux cônes et la sphère, sous les conditions imposées par l'énoncé, est inférieur au quart du volume de la sphère.

Cherchons la condition pour que la racine positive soit plus grande que R, en supposant $l < 1$.

L'équation peut s'écrire, en changeant tous les signes,

$$y^2(1 - l) + Ry(1 - l) - R^2 = 0;$$

en écrivant que la racine positive est plus grande que R, on trouve pour condition

$$l > \frac{1}{2}.$$

Donc, le volume compris ainsi entre les deux cônes et la sphère est compris entre le huitième et le quart du volume de la sphère.

Il est facile de construire les deux racines de l'équation en y, puisque ces racines étant de signes contraires, le problème revient à trouver deux lignes dont la différence soit R, et dont le produit soit égal au rectangle de deux lignes R et $\frac{R}{1 - l}$. La plus petite de ces racines est celle qui convient au problème.

VARIÉTÉS

DEUX PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DE SITUATION

Par M. **Fleury**, chef d'institution.

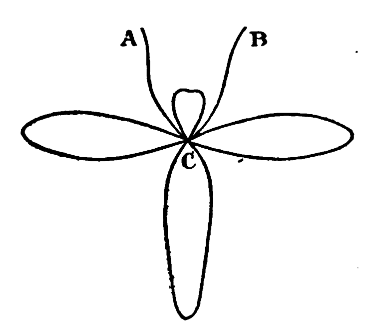
Dans son bel ouvrage intitulé *Récréations mathématiques*, M. Lucas traite, comme exemples de géométrie de situation, le *problème des ponts de Kœnigsberg* et celui des *figures d'un seul trait*. Pour la solution de la première question, il reproduit textuellement un long mémoire d'Euler, auquel il ajoute une note complémentaire, et de cette solution il fait dépendre celle des figures d'un seul trait. Mais personne n'a encore indiqué d'une manière précise la marche à suivre pour arriver sûrement et sans tâtonnements à décrire une figure

d'un trait continu, et sans repasser sur aucune ligne déjà tracée. Dans le présent article je donne : 1° une solution beaucoup plus simple des deux questions que je ramène à une seule ; 2° une règle sûre et très simple pour décrire une figure d'un trait continu, et sans repasser sur les lignes déjà tracées.

Figures d'un seul trait.

La ligne qui part d'un des points A et B, pour aboutir à l'autre, passant cinq fois au point C, il s'ensuit qu'il y a dix chemins qui partent du point C.

On voit ainsi que dans une figure d'un seul trait tous les points sont pairs, à l'exception des deux extrémités de la ligne, qui sont en des points impairs, à moins qu'elles ne soient réunies au même point.



Ainsi, toute figure d'un seul trait a tous ses points pairs, ou seulement deux points impairs. Mais la réciproque de cette proposition n'est pas vraie ; car une figure qui a tous ses points pairs ou seulement deux points impairs peut être composée de plusieurs parties qui ne communiquent pas entre elles ; et il est bien évident que dans ce cas elle ne peut se décrire d'un seul trait.

Pour reconnaître si une figure peut être tracée d'un seul trait, il faut d'abord s'assurer que toutes ses parties communiquent entre elles, et ensuite que tous ses points sont pairs ou qu'elle n'a que deux points impairs.

Lorsque tous les points de la figure sont pairs, on peut partir d'où l'on veut, et l'on finit nécessairement où l'on a commencé ; tandis que si la figure a deux points impairs, il faut nécessairement commencer par l'un et finir par l'autre.

La figure étant tracée à la craie sur le tableau noir, la question consiste à en décrire une pareille, ou, en sui-

vant la même marche, à en effacer successivement les lignes avec le doigt ou un pinceau. Pour faciliter l'explication, je supposerai que c'est un pinceau qui suit et efface à mesure les lignes de la figure donnée.

J'appellerai figure réduite, toute figure composée seulement des lignes qui ne sont pas encore effacées; point d'arrivée, le point où est arrivé le pinceau qui efface; et point final, celui par lequel se termine l'opération.

Le point d'arrivée et le point final sont nécessairement les deux points impairs de toute figure réduite. Il n'y a qu'au moment où le pinceau passe par le point final que la figure a tous ses points pairs.

Durant toute l'opération le nombre des points impairs étant nécessairement deux ou zéro, une figure réduite ne peut devenir impossible qu'en se partageant en deux parties qui ne communiquent plus entre elles.

Si par les points d'une figure on entend seulement ses points multiples, la ligne qui joindra deux points A et B sans passer par aucun point intermédiaire sera un chemin direct, et si c'est le seul chemin qui aille de A à B, je l'appellerai chemin isolant; parce qu'une fois qu'il est parcouru et effacé, la figure se trouve partagée en deux parties isolées l'une de l'autre.

Cela posé, la règle sûre et très simple pour réussir à décrire d'un seul trait la figure donnée, c'est de ne prendre un chemin isolant que lorsqu'il n'en reste plus d'autre à prendre.

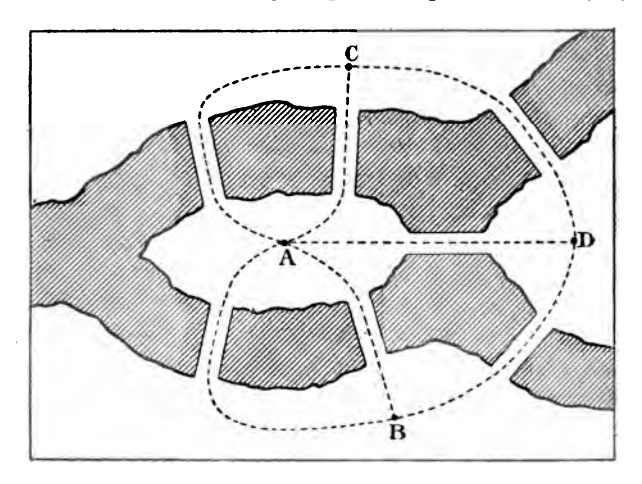
Cette condition est nécessaire; car si, arrivé en A, je prends le chemin isolant AB, lorsqu'un autre chemin partant du point A n'a pas été parcouru, la figure réduite sera partagée en deux figures partielles isolées, et il ne me sera plus possible de revenir à celle que j'aurai quittée. La condition est suffisante : car le point A étant impair, puisque c'est le point d'arrivée, il devient pair par la suppression du chemin AB, et alors, en décrivant la figure partielle située du côté du point A, on reviendra en A, après quoi l'on prendra le chemin AB pour aller décrire l'autre figure partielle, qui contient le point final; autrement si ce point était sur la pre-

mière figure partielle, celle-ci n'aurait qu'un seul point impair, ce qui est absolument impossible.

Problème des ponts de Kœnigsberg.

Ce problème consiste à déterminer le parcours à suivre pour passer une seule fois chacun des sept ponts répartis comme l'indique la figure ci-dessous.

Supposons que l'on désigne par les points A, B, C, D, les



bureaux où il faut aller prendre chaque fois son billet pour le passage du pont suivant, et tirons les lignes qui joignent ces points deux à deux en passant par tous les ponts. La question reviendra évidemment à décrire d'un seul trait la figure formée par toutes ces lignes. Or les quatre points A, B, C, D étant impairs, la figure ne peut se décrire d'un seul trait, et ainsi le problème des ponts de Kœnigsberg est impossible.

Il n'en serait pas de même pour un piéton qui se proposerait de passer une fois sur chacun des deux trottoirs de chaque pont; car alors toutes les lignes étant doublées, les points A, B, C, D deviendraient pairs, et ainsi le problème du piéton serait possible en commençant par où l'on voudrait.

De même, si dans le premier cas on établissait un pont

de plus entre A et B, ces deux points deviendraient pairs, et le problème serait possible en commençant par un des deux points C et D, Si, en outre, on établissait un pont de plus entre C et D, le parcours de tous les ponts serait possible en commençant par où l'on voudrait.

La possibilité du problème une fois reconnue, il suffit pour en assurer la réussite de suivre la règle très simple qui consiste à ne prendre un chemin isolant que quand il n'en reste plus d'autre à prendre.

La règle donnée par Euler, équivoque et incomplète, d'une part, est, d'autre part, la meilleure pour assurer la non-réussite du problème. La voici telle qu'elle est reproduite dans l'ouvrage de M. Lucas : « On supprime par la pensée les couples de ponts qui conduisent d'une région dans une autre; on cherche ensuite la course à effectuer avec le reste des ponts. Cela fait on rétablit les ponts supprimés. »

L'auteur ne dit pas la règle à suivre pour trouver « la course à effectuer avec le reste des ponts » ; ce qui peut être toute la question. Mais supposons cette course trouvée et effectuée. il sera souvent impossible de passer ensuite tous les ponts rétablis.

BIBLIOGRAPHIE

Tables de logarithmes a six décimales, construites sur un plan nouveau, par *Adolphe Benoist*, docteur en droit, membre de la Société Mathématique de France. — Paris, librairie Delagrave.

Les Tables de Logarithmes de M. Benoist se distinguent des tables précédentes par un certain nombre de modifications qui sont, à coup sûr, des perfectionnements pour des ouvrages de cette nature.

Une première modification, qui tient principalement au nombre de décimales choisi par l'auteur, consiste dans les tables de parties proportionnelles. On sait que, en général, on peut compter sur autant de figures au nombre qu'il y a de décimales dans le logarithme; il en résulte que, les tables donnant déjà cinq figures, l'interpolation ne devra en donner qu'une. De là cette idée fort heureuse de M. Benoist, d'inscrire sur une colonne verticale les neuf premiers nombres, à droite et en face, la correction à faire subir

au logarithme lorsque la sixième figure du nombre est l'un de ces chiffres, tandis que, à gauche, il inscrit les modifications du logarithme qui donneront, en négligeant le septième chiffre, une sixième figure déterminée. Nous croyons que cette modification pourra, dans beaucoup de cas, abréger les calculs.

Parlons immédiatement d'une seconde modification introduite dans les nouvelles tables, et qui est très bonne. On sait que, dans les tables les mieux faites, celles de Schron par exemple, il y avait tout un calcul à faire pour obtenir les logarithmes des sinus ou des tangentes des arcs inférieurs à 3 degrés. M. Benoist a conservé le bas des pages des logarithmes des nombres pour y inscrire les logarithmes de ces sinus et de ces tangentes, mais il a donné immédiatement ces logarithmes eux-mêmes, de façon qu'il n'y a pas de calcul nouveau à faire pour les obtenir. De plus, la disposition même des tables en dix colonnes lui permet de donner, dans un espace restreint, les logarithmes des lignes de ces arcs de seconde en seconde.

Mais ce que nous trouvons surtout avantageux au point de vue du calcul, ce sont les modifications apportées dans la disposition des tables de lignes trigonométriques. Ces modifications sont les suivantes : d'abord une seule page contient les logarithmes d'une ligne trigonométrique pour un degré. Il a suffi pour cela de prendre une disposition analogue à celle des tables ordinaires pour les logarithmes des nombres. Une première colonne verticale contient les nombres de 0 à 59; ce sont les minutes. Puis il y a sept colonnes verticales marquées 0, 10, 20, ... 60. C'est dans ces colonnes que sont inscrites les quatre dernières décimales du logarithme pour les dizaines de seconde. Il en résulte les deux avantages suivants: on peut, au moyen de la première colonne, avoir immédiatement les logarithmes des arcs de minute en minute; puis on sait que pour la dernière dizaine de secondes, on aura à chercher les quatre dernières décimales toujours dans la même colonne verticale.

En second lieu, la table comprend les logarithmes des lignes trigonométriques de tous les arcs du premier quadrant lus *toujours dans le même sens;* les sinus se liront toujours de haut en bas, l'arc étant pris à gauche; il en est de même pour la tangente; pour les lignes complémentaires, on lit les logarithmes de bas en haut, l'arc est compté sur la droite. Cette disposition a permis de réduire le nombre des pages de la table, tout en donnant moins de chances d'erreur pour la lecture des logarithmes. Pour l'interpolation même, on saura que l'on doit *ajouter* lorsque les nombres se lisent de haut en bas, et de gauche à droite, que l'on doit *retrancher* quand les nombres se lisent de bas en haut, et de droite à gauche.

En résumé, nous croyons que les nouvelles tables de M. Benoist rendront de grands services à ceux qui ont fréquemment à faire des calculs de logarithmes; nous ne regrettons même pas que l'auteur n'ait pas indiqué si le dernier chiffre est ou n'est pas forcé; nous ne croyons pas que cette connaissance soit vraiment d'une grande utilité dans la pratique.

La disposition adoptée par M. Benoist rend très facile la lecture des chiffres; c'est là un point important pour un ouvrage tel que celui que nous venons d'analyser. Nous estimons donc, que ce livre mérite, à plus d'un titre, d'attirer l'attention des professeurs et nous pensons qu'il rendra de grands services aux élèves en leur facilitant le succès de ce calcul trigonométrique qui fait partie des épreuves écrites de leurs examens.

G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

114. — On donne un triangle ABC, et le cercle circonscrit. Un point mobile M parcourt ce cercle. Pour chaque position du point mobile, on construit : 1° la droite de Simson relative au point A et au triangle BCM; 2° la droite de Simson relative au point B et au triangle ACM. Lieu du point I d'intersection de ces deux droites.

(X. Antomari.)

115. — On donne deux circonférences ayant pour centre commun le point O. Soient OT un rayon quelconque de la grande circonférence, Ot un rayon quelconque de la petite circonférence. Par le point T, on mène la tangente à la première, et par le point t la tangente à la deuxième. Soient M leur point de rencontre, et I l'un des points de rencontre de Mt avec la petite circonférence. Prouver que l'on a

$$Mt^2 = MT^2 + It^2. \qquad (X. A.)$$

116. — Si dans un triangle ABC, l'angle A est double de l'angle B, on a entre les côtés la relation

$$a^2 = b\,(b + c).$$

Cas du triangle rectangle, A et B étant aigus. Réciproque.

(X. A.)

117. — On donne un quadrilatère ABCD; soient A′ le centre de gravité du triangle BCD, B′ celui du triangle CAD, etc. Prouver que les deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ sont homothétiques. *(X. A.)*

118. — On donne le triangle ABC et le rayon r du cercle inscrit. Soient A′B′C′ les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle, A′ étant sur BC, etc. On pose $AC' = \alpha$, $BA' = \beta$, $CB' = \gamma$. Si S désigne la surface du triangle ABC, prouver que l'on a

$$S = \frac{\alpha\beta\gamma}{r}. \qquad (X. A.)$$

119. — La figure étant la même que celle de la question précédente, par le point L, pris sur le cercle inscrit, on mène une quatrième tangente $A_1B_1C_1$, le point A_1 étant sur BC, etc. On pose $LA_1 = x$, $LB_1 = y$, $LC_1 = z$; quelle relation y a-t-il : 1° entre x et y; 2° entre x et z; 3° entre y et z; 4° entre x, y, z? En conclure la formule

$$S = \frac{\alpha\beta\gamma}{r}. \qquad (X.\ A.)$$

120. — On considère un parallélogramme ABCD; par le sommet C, on mène une transversale mobile qui rencontre AB au point P, et AD en Q. Sur CP et CQ comme diamètre on décrit des cercles. Trouver le lieu géométrique décrit par le centre de similitude de ces deux cercles. *(G. L.)*

RECTIFICATION

L'article que nous avons publié (p. 222) et ayant pour titre *Considérations sur la projection oblique du cercle* est extrait textuellement des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. XIV, p. 324 et 359, 1875).

C'est par un malentendu que cet article a été publié dans le *Journal de Mathématiques ;* l'auteur regrette cet oubli, et la Rédaction retire l'article.

(*La Rédaction*).

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 23068-3.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par **M. Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir pages 217 et 241.)

XI

Trouver une relation entre les distances x, y, z *d'un point* O *du plan d'un triangle aux trois sommets* A, B, C *et les côtés* a, b, c *de ce triangle.*

On a par les formules connues

$$\cos\frac{1}{2}\,BOC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(y+z+a)(y+z-a)}{yz}}$$

$$\cos\frac{1}{2}\,COA = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+z+b)(x+z-b)}{xz}}$$

$$\cos\frac{1}{2}\,AOB = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+y+c)(x+y-c)}{xy}}$$

mais entre les trois angles $\frac{1}{2}$ BOC, $\frac{1}{2}$ COA, $\frac{1}{2}$ AOB dont la somme est 90°, on a la relation

$$1 - \cos^2\frac{1}{2}\,BOC - \cos^2\frac{1}{2}\,COA - \cos^2\frac{1}{2}\,AOB$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\,BOC\cos\frac{1}{2}\,COA\cos\frac{1}{2}\,AOB\,;$$

en remplaçant les cosinus de ces angles par leurs valeurs respectives, on a donc

$$1 - \frac{1}{4}\left(\frac{(y+z)^2-a^2}{yz} + \frac{(x+z)^2-b^2}{xz} + \frac{(x+y)^2-c^2}{xy}\right)$$

$$= \frac{1}{4xyz}\sqrt{\Big((y+z)^2-a^2\Big)\Big((x+z)^2-b^2\Big)\Big((x+y)^2-c^2\Big)}$$

élevant au carré et développant, il vient

$$a^2x^4 + b^2y^4 + c^2z^4 - (b^2+c^2-a^2)(a^2x^2+y^2z^2) -$$
$$(a^2+c^2-b^2)(b^2y^2+x^2z^2) - (a^2+b^2-c^2)(c^2z^2+x^2y^2)$$
$$+ a^2b^2c^2 = 0. \qquad (1)$$

Nous engageons les élèves à appliquer cette formule à divers problèmes comme ceux-ci :

Trouver le point du plan d'un triangle pour lequel les distances aux trois sommets sont proportionnelles (ou inversement proportionnelles) aux côtés opposés; aux carrés des côtés opposés ; à la somme des carrés des deux côtés qui aboutissent au même sommet, etc.; ils trouveront là un bon exercice de calcul.

Ces problèmes peuvent aussi se résoudre géométriquement par intersection de lieux.

Remarque I. — Si l'on fait $x = y = z$ dans la formule (1), on trouve le rayon du cercle circonscrit.

Remarque II. — *Si* O *est le point tel que les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés soient symétriques des pieds des hauteurs par rapport au milieu des côtés* — (ce point est celui que nous avons déjà rencontré dans notre étude sur le tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux : *Association française, Congrès de Nantes de 1875*), *la somme des carrés des côtés des trois triangles* BOC, AOC, AOB *est la même pour chacun d'eux.*

Dans ce cas l'on a

$$x^2 = \frac{a^6 - (b^2 - c^2)^2(2b^2 + 2c^2 - 3a^2)}{16S^2}$$

et les valeurs analogues pour y^2 et z^2, S désignant la surface du triangle ABC.

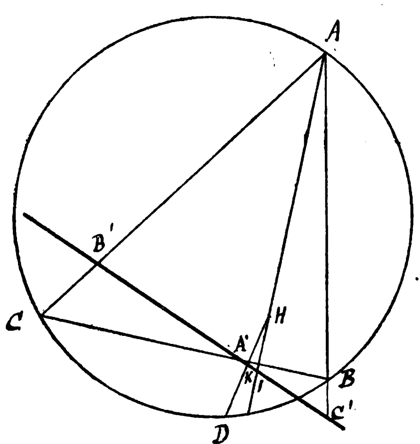
XII

Trouver sur la circonférence circonscrite à un triangle ABC *un point* D *tel que la droite de Simson correspondant à ce point soit parallèle à une direction donnée.*

Supposons le problème résolu : soient A′, B′, C′ les pieds des perpendiculaires abaissées de D sur les trois côtés (la droite de Simson est la droite A′B′C′), soit H le point de concours des hauteurs du triangle ABC. Soit I le point d'intersection de AH avec A′B′C′ et K le point d'intersection de DH avec A′B′C′.

On sait que KD = KH. Donc K appartient au lieu des

points qui divisent en deux parties égales les rayons vecteurs allant de H à la circonférence circonscrite. Ce lieu est le cercle des neuf points du triangle ABC.



On sait aussi que K est le milieu de A'I, donc K appartient à la droite lieu des milieux des parties des parallèles à la direction donnée comprise entre les deux droites BC et AH.

Le point K de la droite cherchée est donc déterminé par l'intersection de ces deux lieux, et le problème est résolu.

XIII

On donne deux circonférences de centre O *et de rayon* R *et* r *et une droite fixe* JM', *dont la distance* JO *au centre des circonférences est* l ; *on construit les cercles ayant leur centre en* M, *point quelconque de la circonférence de rayon* R, *et tangente à* JM' *en* M'. *Trouver le lieu des centres de similitude de ces cercles et du cercle de rayon* r.

Soient O' et O'_1 les points d'intersection de OJ avec la circonférence de rayon r;

O'M' et OM se coupent en P, qui est le centre de similitude directe considéré ;

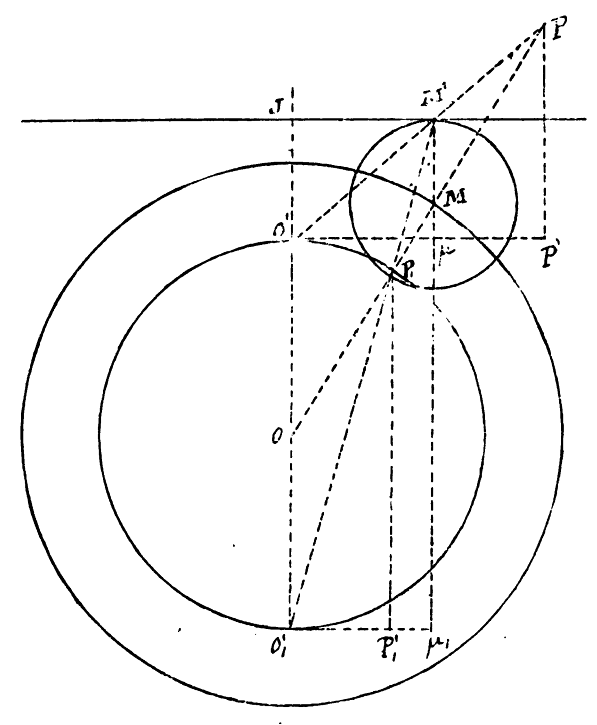
O'_1M' et OM se coupent en P_1 qui est le centre de similitude inverse considéré ;

Soient P' et μ les pieds des perpendiculaires abaissées de P et de M sur la tangente menée en O' au cercle de rayon r; soient P'_1 et μ_1 les pieds des perpendiculaires abaissées de P_1 et M sur la tangente menée en O'_1 au cercle de rayon r.

On a
$$\frac{PP'}{M'\mu} = \frac{O'P}{O'M'} = \frac{OP}{OM}$$

ou
$$\frac{PP'}{l-r} = \frac{OP}{R}.$$

Le rapport $\frac{PP'}{OP}$ est donc constamment égal à $\frac{l-r}{R}$ et le



lieu de P est une conique qui a O pour foyer et O'P' pour directrice.

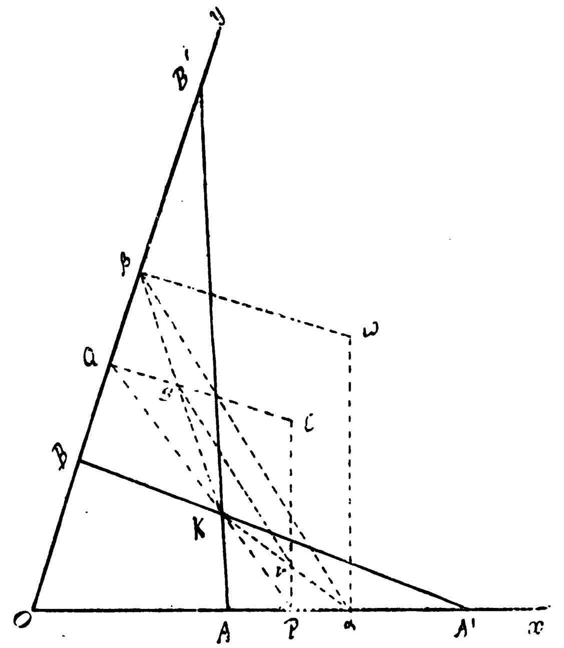
On aurait de même
$$\frac{P_1P'_1}{OP_1} = \frac{l+r}{R}$$
et le lieu de P_1 est une conique qui a O pour foyer et $O'_1P'_1$ pour directrice.

La discussion est fort simple : car ces coniques sont des

ellipses, des paraboles ou des hyperboles suivant que les rapports $\frac{l-r}{R}$, $\frac{l+r}{R}$ sont plus grands que l'unité, égaux à l'unité, ou plus petits que l'unité.

XIV

Par un point K *fixe, on mène deux droites variables* BA', AB', *qui coupent deux droites fixes* Ox, Oy, *en quatre points* AA',



B,B', *tels que le quadrilatère* AA'BB' *soit inscriptible. Trouver le lieu des centres* ω *des circonférences circonscrites à ces quadrilatères.*

Par K menons la droite PQ perpendiculaire à la bissectrice de l'angle yOx, P étant sur Ox, Q sur Oy.

En P et en Q menons des perpendiculaires respectivement à Ox et à Oy, perpendiculaires se coupant en O'; soit α le milieu de AA', soit β le milieu de BB'.

Les perpendiculaires menées en α et β respectivement à Ox, Oy se coupent en ω, point du lieu.

Soit V le point où $K\alpha$ et PO′ se coupent.

Soit S — $K\beta$ et QO′ —

Les deux triangles AKA′, BKB′ sont semblables; dans ces riangles α et β sont des points homologues ainsi que V et S; on a donc $\dfrac{KV}{KS} = \dfrac{K\alpha}{K\beta}$.

Les deux droites VS et $\alpha\beta$ sont donc parallèles, par suite les deux triangles VO′S, $\alpha\omega\beta$ ont leurs côtés parallèles deux à deux et sont homothétiques; par suite les trois points K, O′, ω, sont en ligne droite.

Le lieu cherché est donc la droite KO′.

Cette question que j'avais proposée dans la *Nouvelle Correspondance de Mathématiques*, y a été résolue analytiquement.

XV

1° *Si deux triangles* AB′C′, A′BC″ *ont deux centres d'homologie* O *et* O′, *ils en ont un troisième* ω; *autrement dit : deux triangles doublement homologiques le sont triplement.*

2° *Soit* C *l'intersection de* AB *et de* C′C″,

— B′ — A′C′ — BB″,

— A″ — AA′ — B″C″,

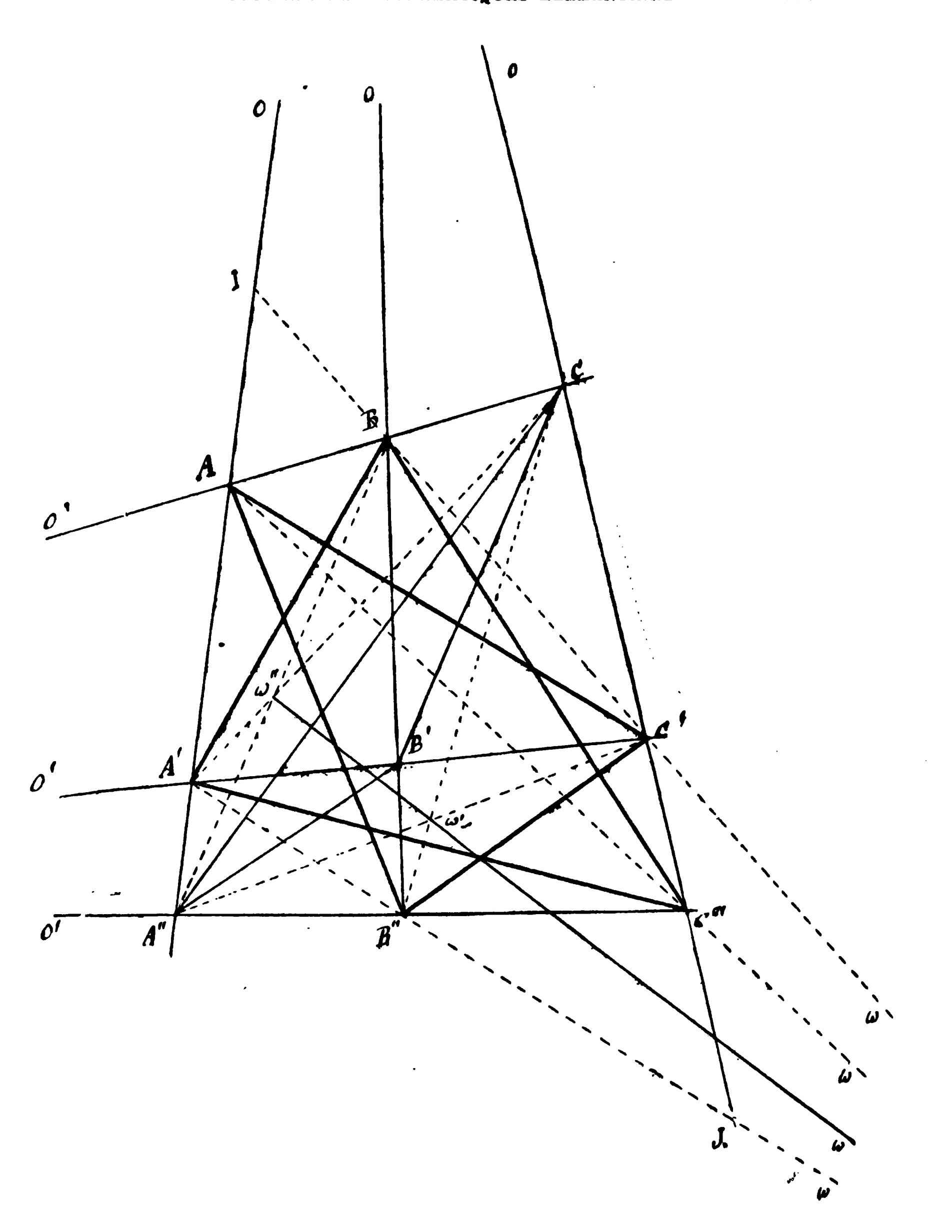
il est évident que les trois triangles AB′C′, A′BC″, CB′A″ *sont deux à deux doublement homologiques, avec* O *et* O′ *pour centres d'homologie, et par suite ils le sont triplement; démontrer que les trois troisièmes centres d'homologie sont en ligne droite.*

Pour démontrer la première partie, il suffit de faire voir que les trois droites BC′, AC″, A′B″ se coupent en un même point ω ou que, si I est le point où BC′ coupe OA et J le point où A′B″ coupe OC, les deux rapports anharmoniques (OIAA′), (OC′C″J) sont égaux : car, le point O étant commun, les droites joignant les autres points se couperont au même point.

Or le faisceau (C′, OIAA′) coupé par OA et CO′ donne

$$(OIAA') = (CBAO')$$

et le faisceau (A′, OC′C″J) coupé par OJ et par O′C″


O
O
O
I
C
B
A
O'
ω''
C'
B'
A'
O'
ω'
O'
A''
B''
C''
ω
ω
J
ω
ω

donne $(OC'C''J) = (A''O'C''B')$;
mais en intervertissant les deux premières lettres avec les deux dernières $(A''O'C''B')$ peut s'écrire $(C''B''A''O')$,
et remarquant que le faisceau $(O, C''B''A''O')$ coupé par O'C et par O'C'' donne $(CBAO') = (C''B''A''O')$,
il vient $(OIAA') = (OC'C''J)$.

Démontrons la seconde partie.

Le centre ω d'homologie de AC'B'' et de BA'C'' est l'intersection de A'B'' et de BC'.

Le centre ω' d'homologie de AC'B'' et de A''B'C est l'intersection de A''C' et de CB''.

Le centre ω'' d'homologie de BA'C'' et de A''B'C est l'intersection de A'C et de A''B.

Les deux triangles A'B''C, A''C'B sont doublement homologiques avec O et O' comme centres d'homologie, ils en ont donc un troisième ω_1.

Or les points ω, ω', ω'' sont respectivement les points de rencontre des côtés homologues des deux triangles A'B''C, A''C'B, ω_1 étant considéré comme centre; donc ω, ω', ω'' sont en ligne droite.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Par M. H. **Brocard**, capitaine du génie.

(*Suite et fin*, voir page 248.)

VI

Appliquons la méthode précédente aux systèmes de trois points en ligne droite que nous avons indiqués (*).

1. — O, *centre du cercle circonscrit;*
E, *centre de gravité;*
H, *point de concours des hauteurs.*

On trouve facilement

(*) Nous indiquerons les distances au côté *a* par la lettre qui désigne le point, accompagné d'un indice ; la distance de O au côté *a* sera O_a.

$$O_a = \frac{2T}{2n^4 - p^4} a(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$E_a = \frac{2T}{3a}$$

$$H_a = \frac{2T}{2n^4 - p^4} \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{a}$$

et l'on a

$$\frac{O_a - E_a}{E_a - H_a} = \frac{p^4 + n^4 - 3b^2c^2 - 3a^4}{2p^4 + 2n^4 - 6b^2c^2 - 6a^4} = \frac{1}{2}$$

ce qui montre, en outre, que HE = 2EO, relation connue.

2. — D, *centre d'homologie des triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$;
E, *centre de gravité ;*
S, *milieu de* $\omega\omega'$.

On trouve facilement

$$D_a = \frac{2Ta^2b^2c^2}{n^4} \frac{1}{a^3} ;$$

$$E_a = \frac{2T}{3a} ;$$

$$S_a = \frac{T}{n^4} . a(b^2 + c^2)$$

et l'on a $\dfrac{D_a - E_a}{E_a - S_a} = \dfrac{2(3b^2c^2 - n^4)}{2n^4 - 3a^2(b^2 + c^2)} = 2,$

ce qui établit en outre que DE = 2ES.

3. — D', *point correspondant à* D ;
K, *centre des médianes antiparallèles ;*
O, *centre du cercle circonscrit, ou, ce qui revient au même,* S *milieu de* $\omega\omega'$.

On a alors $S_a = \dfrac{T}{n^4} a(b^2 + c^2)$;

$$K_a = \frac{2T}{m^2} . a ;$$

$$D'_a = \frac{2T}{p^4} . a^3 ;$$

et l'on en tire

$$\frac{S_a - K_a}{K_a - D'_a} = \frac{(b^2 + c^2)m^2 - 2n^4}{(b^2 + c^2)p^4 - 2a^2n^4} . \frac{p^4}{m^2} = \frac{p^4}{m^4}.$$

Pour prouver que D′ est, en même temps, le pôle de $\omega\omega$, il suffit d'établir que le rapport de OS à SD′ est bien celui qui résulterait de la situation du pôle de la corde $\omega\omega'$. Or on a dans cette hypothèse

$$OS = \frac{OK}{2}(1 + \cos 2\alpha) = OK \cos^2 \alpha;$$

$$SD' = \frac{\omega\omega'}{2} \operatorname{tg} 2\alpha;$$

donc $$\frac{OS}{SD'} = \frac{OK(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\omega\omega' \operatorname{tg} \alpha(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{m^2 \,.\, OK \,.\, p^4}{2\omega\omega' \,.\, n^4\sqrt{2n^4 - p^4}}.$$

Mais

$$OK = \frac{2abc\sqrt{p^4 - n^4}}{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}}; \qquad \omega\omega' = \frac{abc\sqrt{p^4 - n^4}}{p^4}.$$

Donc après réduction on trouve

$$\frac{OS}{SD'} = \frac{p^4}{2n^4 - p^4};$$

d'autre part on a

$$\frac{O_a - S_a}{S - D'_a} = \frac{p^4[2n^4(b^2 + c^2 - a^2) - (b^2 + c^2)(2n^4 - p^4)]}{(2n^4 - p^4)[(b^2 + c^2)p^4 - 2a^2n^4]}$$
$$= \frac{p^4}{2n^4 - p^4}.$$

Donc le point D′ est bien le pôle de $\omega\omega'$.

Remarque. — Par construction, $\omega S\omega'$ est la corde commune au cercle de Brocard et à la circonférence décrite sur ZD comme diamètre. Ainsi

$$S\omega^2 = SO.SK = SZ.SD',$$

on en déduit $$SO = \frac{m^2abc\sqrt{p^4 - n^4}}{2n^4\sqrt{2n^4 - p^4}};$$

$$SZ = \frac{p^4abc\sqrt{p^4 - n^4}}{2n^4m^2\sqrt{2n_7 - p^4}};$$

$$SK = \frac{abc\sqrt{p^4 - n^4}\sqrt{2n^4 - p^4}}{2n^4m^2};$$

$$SD' = \frac{m^2abc\sqrt{p^4 - n^4}\sqrt{2n^4 - p^4}}{2n^4p^4}.$$

4. — S′, *point correspondant à* S ;
E, *centre de gravité ;*
D′, *pôle de* ωω′,

On a les formules

$$S'_a = \frac{2T}{p^4 + 3n^4} \cdot \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}{a};$$

$$E_a = \frac{2T}{3a};$$

$$D' = \frac{2T}{p^4} a^3.$$

On en tire alors

$$\frac{D'_a - E_a}{S'_a - E_a} = \frac{(3a^4 - p^4)(p^4 + 3n^4)}{p^4(3a^4 + 3n^4 - p^4 - 3n^4)} = \frac{p^4 + 3n^4}{p^4} = \text{const.}$$

5. — H, *point de rencontre des hauteurs ;*
S, *milieu de* ωω′ ;
Z′, *point correspondant au centre* Z *du cercle de Brocard.*

Le point Z étant le milieu de OK, les distances de Z s'obtiendront par le même moyen que celles du point S, milieu de ωω′. On trouve ainsi

$$Z_a = \frac{2T(2n^4 - a^2m^2)}{m^2(2n^4 - p^4)};$$

$$Z'_a = \frac{2T(2n^4a^2m^2 + m^4b^2c^2 - 2n^4p^4)}{3an^4(2n^4 - p^4)}.$$

A cette dernière expression il faut joindre les formules

$$H_a = \frac{2T}{a(2n^4 - p^4)}(2a^4 + 2b^2c^2 - p^4);$$

$$S_a = \frac{Ta(m^2 - a^2)}{n^4}.$$

On trouve ainsi $\quad \dfrac{H_a - Z'_a}{Z'_a - S_a} = 2,$

ou encore $\quad 3Z'_a = H'_a + 2S_a.$

A l'inspection des formules, on reconnaîtrait les indices de l'existence d'une relation de ce genre.

Le reste du calcul s'achève facilement et on vérifie l'identité

$$2n^4a^2m^2 + b^2c^2m^4 - 2n^4p^4$$
$$= n^4(2a^4 + 2b^2c^2 - p^4) + a^2(m^2 - a^2)(2n^4 - p^4).$$

Le rapport des segments déterminés sur les droites SD, OH, par le point E, et sur la droite SH par le point Z′ montre que les lignes DH, OSD′, EZ′ sont parallèles.

Cette propriété nous servira dans la suite, et nous permettra d'établir facilement les autres propositions qu'il nous reste à démontrer.

6. — O, *centre du cercle circonscrit;*
S′, *point correspondant à* S ;
Z′, *point correspondant à* Z.

Le fait de la situation de ces trois points en ligne droite sera établi, si l'on prouve que $\frac{Z'S'}{S'O}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{S'_a - Z'_a}{O_a - S'_a}$, est égal au rapport $\frac{EZ'}{OD'}$, déduit des expressions de EZ′ et de OD′.

Or on a

$$\frac{EZ'}{OD'} = \frac{\frac{2}{3}OS}{OD'} = \frac{2OS}{3(OS + SD')} = \frac{p^4}{3n^4}.$$

D'autre part :

$$O_a = \frac{2T}{2n^4 - p^4}a(m^2 - 2a^2);$$
$$S'_a = \frac{2T}{p^4 + 3n^4}\cdot\frac{(m^2 - b^2)(m^2 - c^2)}{a};$$
$$Z'_a = \frac{2T(2n^4a^2m^2 + m^4b^2c^2 - 2n^4p^4)}{3an^4(2n^4 - p^4)}.$$

Réduisant au même dénominateur, et supprimant, pour simplifier, ce dénominateur commun, il vient

$$\frac{S'_a - O_a}{Z'_a - S'_a} = \frac{3n^4(n^4 + a^4)(2n^4 - p^4) - 3n^4a^2(m^2 - 2a^2)(p^4 + 3n^4)}{(3n^4 + p^4)(2n^4a^2m^2 + b^2c^2m^4 - 2n^4p^4) - 3n^4(n^4 + a^4)(2n^4 - p^4)}$$

Cette expression se réduit à

$$\frac{3n^4}{p^4},$$

ce qui établit la proportion.

7. — K, *centre des médianes antiparallèles;*
S′, *point correspondant à* S;
D, *centre d'homologie des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$.

On a $$K_a = \frac{2T}{m^2}a;$$
$$S = \frac{2T}{p^4 + 3n^4}\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a};$$
$$D_a = \frac{2Ta^2b^2c^2}{n^4}\cdot\frac{1}{a^3}.$$

Alors on trouve
$$\frac{S'_a-D_a}{K_a-D_a} = \frac{m^4[m^2n^4-n^4(b^2+c^2)-m^2b^2c^2]}{n^4(p^4+3n^4)(n^4a^2-m^2b^2c^2)} = \frac{m^4}{n^4(p^4+3n^4)} = \text{const.}$$

8. — Z, *centre du cercle de Brocard;*
S′, *point correspondant à* S;
H, *point de concours des hauteurs.*

Pour démontrer que ces trois points sont en ligne droite, il suffit d'établir que
$$\frac{HS'}{S'Z} = \frac{AD}{ZK} = \frac{2\,OS}{OZ} = \frac{m^4}{n^4}.$$

Or, on a $$Z_a = \frac{2T}{m^2(2n^4 - p^4)}a(2n^4 - a^2m^2);$$
$$S'_a = \frac{2T}{p^4 + 3n^4}\frac{(a^4 + n^4)}{a};$$
$$H_a = \frac{2T}{2n^4 - p^4}\frac{2a^4 + 2b^2c^2 - p^4}{a}.$$

On en déduit
$$\frac{H_a-S'_a}{S'_a-Z_a} = \frac{m^2(3a^4p^4-2p^4n^4+4n^4a^4-p^8-2n^8+2p^4b^2c^2+6n^4b^2c^2)}{n^4(5a^4m^2 + 2n^4m^2 - 6n^4a^2 - p^4m^2 - 2p^4a^2)}.$$

En remplaçant, au numérateur, $2n^4$ par $m^4 - p^4$, la parenthèse devient
$$m^4(2a^4 - p^4 - n^4 + 3b^2c^2) + p^4(a^4 + n^4 - b^2c^2),$$
ou $$m^4(2a^4 - p^4 - n^4 + 3b^2c^2) = p^4a^2m^2.$$

Par conséquent, on doit avoir identiquement
$$m^2(2a^4 - p^4 - n^4 + 3b^2c^2) + p^4a^2 = m^2(5a^4 + 2n^4 - p^4) - 6n^4a^2 - 2p^4a^2;$$

en faisant passer tout dans le premier membre, on obtient l'identité $3m^2(a^4 + n^4 - b^2c^2 - a^2m^2) = 0$.

La proposition est donc démontrée.

VII

Intersection commune aux droites OD, EZ, KZ′, HD′.

Nous arrivons maintenant à la notion d'un certain point N du cercle circonscrit, par lequel passent quatre lignes principales, joignant des groupes de points correspondants : OD, EZ, KZ′, HD′.

Cette propriété résulte très simplement de la similitude des triangles déterminés par la ligne EZ′, parallèle à OD′ dans les triangles ayant leurs bases sur OD′, et leurs sommets sur la parallèle DH.

Tout revient à prouver, en premier lieu, que les rapports $\frac{OZ}{YE}$ ou $\frac{ZK}{EZ'}$, et $\frac{KD'}{Z'V}$, Y et V étant les intersections de EZ′ avec OD et HD′, sont égaux.

Or, on a $OZ = ZK = \dfrac{abc\sqrt{p^4 - n^4}}{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}}$;

$$YE = EZ' = \frac{2}{3}\,OS = \frac{m^2abc\sqrt{p^4 - n^4}}{3n^4\sqrt{2n^4 - p^4}};$$

$$KD' = ZD' - ZK = \frac{abc\sqrt{p^4 - n^4}\sqrt{2n^4 - p^4}}{m^2p^4};$$

$$Z'V = \frac{2}{3}\,SD' = \frac{m^2abc\sqrt{p^4 - n^4}\sqrt{2n^4 - p^4}}{3n^4p^4},$$

et l'on a bien $\dfrac{OZ}{YE} = \dfrac{ZK}{EZ'} = \dfrac{KD'}{Z'V} = \dfrac{3n^4}{m^4}$.

Mais

$$OD = \frac{abc}{\sqrt{2n^4 - p^4}} \cdot \frac{p^4 - n^4}{n^4}, \text{ et } YO = \frac{1}{3}\,OD;$$

par conséquent

$$NY = NO + \frac{1}{3}\,OD = \frac{abc}{\sqrt{2n^4 - p^4}}\left(1 + \frac{p^4 - n^4}{3n^4}\right)$$

$$= \frac{abcm^4}{3n^4\sqrt{2n^4 - p^4}},$$

et
$$\frac{\mathrm{NO}}{\mathrm{NY}} = \frac{3n^4}{m^4}.$$

Ainsi, le point N est une des extrémités du diamètre DON du cercle circonscrit.

Incidemment, U désignant l'intersection de EZ′ avec DK on voit facilement que l'on a

$$\mathrm{UZ'} = \frac{abcp^4\sqrt{p^4 - n^4}}{3m^2n^4\sqrt{2n^4 - p^4}}.$$

VIII

Remarques. — La plupart des lignes que nous avons considérées s'expriment en fonction des quantités $\sqrt{p^4 - n^4}$, $\sqrt{2n^4 - p^4}$. La présence de ces deux radicaux montre tout d'abord que si a, b, c désignent les côtés d'un triangle, on a toujours

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 < a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

En outre, le radical $\sqrt{p^4 - n^4}$ ne figure jamais au dénominateur, parce que les lignes considérées peuvent être nulles, sans jamais devenir infinies. Au contraire, le radical $\sqrt{2n^4 - p^4}$, qui représente quatre fois la surface du triangle, figure indifféremment au numérateur ou au dénominateur, parce qu'il ne peut jamais se réduire à zéro.

La méthode que nous avons exposée pour les démonstrations précédentes est presque exclusivement analytique ; elle ne paraît pas offrir, à cet égard, toute la simplicité désirable, et il est à présumer qu'une méthode synthétique s'appliquerait avantageusement à l'étude des propriétés énoncées. Il était utile, cependant, de faire connaître les plus essentielles, et d'en donner, en attendant, une démonstration uniforme.

Les propositions dont il a été question dans cette note conduisent à une série d'intéressantes constructions.

Pour mieux dégager la situation des lignes, il conviendra d'opérer sur un triangle de grandes dimensions. Il y aura

avantage à prendre un triangle de forme obtusangle; l'intervalle des divers points remarquables se dessinera plus nettement.

IX

Pour terminer cette note, nous allons indiquer un certain nombre de relations métriques entre les éléments du triangle donné et le cercle des sept points.

Soit D le diamètre du cercle circonscrit à ABC, δ la ligne $\omega\omega'$; on a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = D = \frac{\delta}{\sin \alpha \sqrt{1 - 4\sin^2 \alpha}} = \frac{2abc}{\sqrt{2n^4 - p^4}}.$$

On en déduit $\delta = \frac{abc}{n^4}\sqrt{p^4 - n^4}$.

On trouverait facilement

$$OK = \frac{2abc}{m^2}\frac{\sqrt{p^4 - n^4}}{\sqrt{2n^4 - p^4}};$$

$$A_1B_1 = \frac{c\sqrt{p^4 - n^4}}{m^2},$$

et ainsi de suite.

Par conséquent, le rapport de similitude des triangles $A_1B_1C_1$ et ABC est

$$\frac{A_1B_1}{a} = \frac{D}{OK} = \frac{2}{\sqrt{1 - 3\text{tg}^2\alpha}} = \frac{m^2}{\sqrt{p^4 - n^4}};$$

d'où

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\sqrt{2n^4 - p^4}}{m^2}$$

$$\text{tg}\ 2\alpha = \frac{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}}{p^4}$$

$$\text{tg}\ 3\alpha = \frac{(p^4 + n^4)\sqrt{2n^4 - p^4}}{m^2(p^4 - n^4)}$$

$$\text{tg}\ 4\alpha = \frac{m^2p^4\sqrt{2n^4 - p^4}}{p^8 - 2n^8}.$$

La distance du centre O du cercle circonscrit à l'axe radi-

cal de ce cercle et du cercle de Brocard a pour expression

$$\frac{D}{2\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{m^2abc}{4\sqrt{p^4-n^4}\ \sqrt{2n^4-p^4}}.$$

Enfin on arriverait très simplement à des résultats analogues pour les équations des diverses lignes, et l'on rencontrerait ainsi une foule de relations d'identité entre les côtés ou les lignes trigonométriques du triangle. — C'est un exercice que nous laisserons à la curiosité de nos lecteurs.

NOTE ADDITIONNELLE

Le centre de gravité F du périmètre du triangle est le centre du cercle inscrit au triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du premier.

En conséquence, ses distances aux côtés de ce triangle ont pour expression

$$\frac{h}{2} - \frac{\delta_i}{2} = \frac{S(b+c)}{a(a+b+c)}, \text{ etc.}$$

Cela posé, il est facile de vérifier que les points I, E, F sont en ligne droite, et que $IE = 2.EF$ (Euler).

En effet, l'on a

$$\text{I} \quad \delta = \frac{2S}{a+b+c}$$

$$\text{E} \quad \delta = \frac{2S}{3a},$$

$$\text{F} \quad \delta = \frac{S(b+c)}{a(a+b+c)}.$$

Donc $$\frac{I-E}{E-F} = \frac{2(2a-b-c)}{2a-b-c} = 2 = \text{const.}$$

Les propositions relatives à la situation des points O, E, H, avec $EH = 2.OE$ et des points I, E, F avec $IE = 2.EF$ ont été établies pour la première fois par Euler, dans le t. XI des *Mémoires de Pétersbourg*, année 1765.

(H. Brocard.)

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE SAINT-CYR (1883)

D'un point A on trace les droites AB, AC, AD, AE faisant entre elles les angles consécutifs α, β, γ. Démontrer la relation

$$\sin\alpha \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta = 0.$$

— On donne un rectangle ABCD. Par un point M, du plan de ce rectangle, on mène quatre droites MA, MB, MC, MD, qui représentent en grandeur et en direction quatre forces appliquées en M. Trouver la résultante de ces forces.

— Étant donnée une sphère, y inscrire un cône dont la surface latérale soit égale à la surface de la calotte sphérique adjacente.

— Etant données les limites de deux progressions décroissantes

$$S = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots\ldots$$
$$s = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots$$

on forme la nouvelle progression

$$\Sigma = 1 + Qq + Q^2q^2 + \ldots\ldots;$$

trouver la somme Σ en fonction de S et de s.

— Trouver, pour $x = 1$, la valeur de l'expression

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}.$$

— Trouver deux nombres dont la somme et le produit soient égaux à la différence des carrés.

— D'un point A tombe un mobile pesant, sans vitesse initiale ; n secondes après, on en lance un autre suivant la même verticale et l'on demande quelle vitesse il faut lui imprimer pour qu'il atteigne le premier en un point D, tel que AD $= m$.

Un poids P est sur un plan incliné. Il est soumis à quatre forces : son poids, une force verticale opposée 2P, une force horizontale 2P, dirigée vers l'intérieur du plan, et une force 2P, dirigée dans le sens du plan : quel est l'angle de ce plan avec l'horizon si les quatre forces se font équilibre ?

— Résoudre $\sin 3x = \cos 2x$.

— Former une progression arithmétique telle que la somme des n premiers termes soit égale à $(n + 1)$ fois le terme auquel on s'arrête.

— Étant donnés $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, prouver que l'on a $x - y = \frac{\pi}{4}$.

— Étant donnée l'équation $x^2 + 9x - 18 = 0$, calculer la valeur de la fonction $5x' + 5x'' - 6x'x''$.

— Si l'on a $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} z = \frac{1}{8}$, on a aussi $x + y + z = \frac{\pi}{4}$.

— Quelle est la progression arithmétique telle que la somme de ses termes est toujours égale à quatre fois le carré du nombre des termes ?

— Trouver l'équation qui a pour racines les carrés des inverses des racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$. Condition de réalité des racines de cette équation.

— Partager un arc en deux parties telles que la somme de leurs tangentes soit minima.

— Résoudre $\sin 2x = \operatorname{tg} x$.

— On a deux tonneaux dans lesquels il y a du vin. On verse du premier dans le second autant de litres qu'il y en a déjà dans celui-ci ; on verse ensuite du second tonneau dans le premier autant de litres qu'il en reste dans le premier ; puis, du premier dans le second, autant de litres qu'il y en avait déjà dans celui-ci. Il reste alors a litres dans chaque tonneau. Combien y avait-il de litres au début dans chaque tonneau ?

— Déterminer a et b de façon que $3x^4 + ax + b$ soit exactement divisible par $x^2 + 3x - 10$.

— Un plan est incliné d'un angle x sur l'horizon ; un corps est maintenu en équilibre par une force dirigée parallèlement à l'horizon, et égale au poids du corps. Trouver l'angle du plan avec l'horizon. Trouver ce que devient cet angle si l'on tient compte du frottement.

— Si l'on joint le centre de gravité G d'un triangle aux

trois sommets, et que les droites GA, GB, GC représentent des forces en grandeur et en direction, ces forces se font équilibre. Généralisation.

— Un projectile est lancé du point A avec une vitesse donnée v; quel angle la ligne de tir doit-elle faire avec l'horizon pour que le projectile rencontre cet horizon au point B, à la distance a du point A ?

— Construire deux longueurs x et y, sachant que l'on a

$$x + y = a + \frac{b^2}{a}; \quad xy = \frac{b^4}{a^2}.$$

— Déterminer les coefficients p et q de l'équation $x^2 + px + q = 0$, de façon que la différence des racines ait une valeur donnée, ainsi que la différence de leurs carrés.

— Un point matériel assujetti à se mouvoir sur une ellipse est sollicité par deux forces variables représentées à chaque instant, en grandeur et en direction, par les rayons vecteurs de ce point. Trouver la position d'équilibre du point.

— Un point matériel assujetti à se mouvoir sur une demi-circonférence concave, est sollicité par son poids et par l'un des brins de corde d'une poulie fixe, corde qui supporte une force d'intensité f. Trouver les conditions d'équilibre.

— On donne une balance à deux bras inégaux l et l', faisant entre eux un angle de 150°; les deux bras ne sont pas pesants. On met un poids P dans chaque plateau, et on demande la position d'équilibre du système.

— Former l'équation du second degré dont l'une des racines $2 + \sqrt{3}$.

— Étant donné un angle droit xOy, sur Oy les deux longueurs $OA = a$, $AB = b$, on demande en quel point de Ox on doit se placer pour voir ces deux longueurs sous le même angle.

— Dans l'équation $x^2 - 2x - 4 = 0$, calculer la fonction

$$\frac{x_1 - 3}{x_1 + 7} + \frac{x_2 - 3}{x_2 + 7}.$$

— On donne un cercle, un diamètre vertical AOB, et un rayon incliné OC. Déterminer l'angle BOC pour qu'un corps mette le même temps pour parcourir OC qu'un mobile partant de A pour parcourir le diamètre AB.

— Dans un quadrilatère quelconque, on prend le milieu de la ligne qui joint les milieux des diagonales; on joint ce point aux quatre sommets; ces droites représentent des forces en grandeur et en direction; démontrer que le système est en équilibre.

Déterminer les coefficients de l'équation bicarrée de manière que α et α^2 soient racines en même temps.

— Résoudre $\sin x + 1 = \cos 2x$.

— On a $mx + ny + pz = a$; trouver le maximum de $x^m y^n z^p$.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883

Classe de troisième.

On donne deux points fixes sur une circonférence, et on les joint par deux cordes à un même point de la circonférence. Au milieu de l'une de ces cordes, on mène une droite qui coupe la seconde sous un angle donné (63° par exemple). On demande le lieu du point d'intersection lorsque le troisième point parcourt la circonférence. Discuter le problème.

— Faire voir que l'expression

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (2m-1)2m}{1.2.3 \ldots m.2^{2m}}$$

est égale à $\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\ldots\frac{2m-1}{2}$.

Classe de seconde.

On donne une pyramide régulière à base carrée SABCD dont on suppose les faces latérales indéfiniment prolongées au delà du sommet S et au delà de la base ABCD. On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base, et l'on construit un parallélipipède droit ayant pour base la section *abcd* et pour hauteur la distance des deux plans parallèles *abcd* et ABCD. A quelle distance du plan ABCD faut-il mener le plan sécant pour que ce parallélipipède soit un cube?

Discussion du problème, nombre des solutions. (On représentera par a le côté AB de la base de la pyramide donnée, et par h la hauteur de cette pyramide.)

— On donne deux droites A et B quelconques dans l'espace, et un plan P perpendiculaire à la droite A. Par cette droite A on mène un plan quelconque Q, et par la droite B un plan R perpendiculaire au plan Q. Ces deux plans Q et R coupent le plan P suivant deux droites qui se coupent elles-mêmes en un point M. Trouver le lieu que décrit le point M lorsque le plan Q tourne autour de la droite A.

Classe de philosophie.

Étant donné un triangle ABC et un nombre positif m plus petit que l'unité, on prend sur le côté AB un point C_1 tel que AC_1 soit égal à mAB; de même, on prend sur AC un point B_1 tel que CB_1 soit égal à mAC; et sur BC un point A_1 tel que BA_1 soit égal à mBC: 1° Trouver l'aire du triangle $A_1B_1C_1$; — 2° on considère une suite indéfinie de triangles $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots A_pB_pC_p$, dont chacun se déduit du précédent comme le triangle $A_1B_1C_1$ se déduit de ABC; trouver la limite de la somme des aires de ces triangles quand le nombre entier p augmente indéfiniment; — 4° étudier les variations de la limite précédente quand le nombre m varie entre o et 1; — 4° déterminer les positions des points de rencontre des médianes de chacun des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... $A_pB_pC_p$.

QUESTION 90

Solution par M. Bablon, élève au Collège d'Épinal.

On considère une parabole P *et sur l'axe de cette parabole un point* Q *situé à une distance* 2p *du sommet* O. *Soit* A *un point quelconque de* P; *on projette* A *en* B *sur la tangente au sommet; les droites* QB *et* OA *se coupent en un point* I, *dont on demande le lieu géométrique.* (G. L.)

Le point A étant sur la courbe, on a

$$\overline{AA'}^2 = 2p \cdot OA'. \quad (1)$$

Par le point A je mène AC parallèle à BQ; on a alors

$$QC = AB = OA'$$

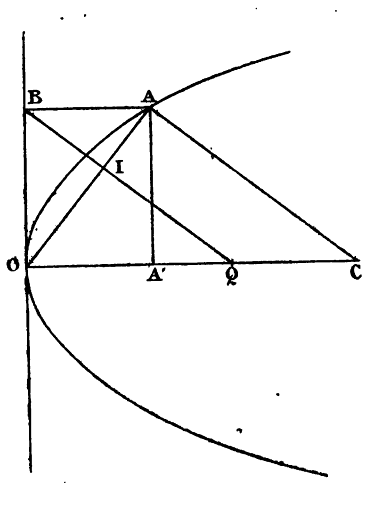
donc

$$QC + A'Q = OA' + A'Q = 2p$$

donc d'après (1), on a

$$\overline{AA'}^2 = OA' \cdot A'C.$$

Ceci fait voir que le triangle OAC est rectangle en A; donc le triangle OIQ lui étant semblable est rectangle en I; par conséquent le lieu cherché est la circonférence décrite sur OQ comme diamètre.



NOTA. — La même question a été résolue par MM. Berdon, Hugon, à Cluny; Aubry, à Charleville; J. Taratte, au lycée Saint-Louis, à Paris; Nobertuo, à Lille; Jung, à Beauvais; de Kerdrel, à Kéruzoret; Gindre, à Pontarlier; Giat, Sauve, à Moulins; Naura, à Vitry-le-François; J. Slabochevitsch, à Saint-Pétersbourg; Poncet, Anstett, à Lyon; Besson, à Nantes; Caronnet, collège Chaptal, à Paris.

QUESTIONS PROPOSÉES

122. — On donne un angle droit yOx, et un point fixe M; autour du point M on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent Ox en A et Oy en B. — Par les points A et B, on mène des parallèles aux droites Oy, Ox; ces parallèles se coupent en un point I. Démontrer que le lieu du point I est une droite. — 2° La parallèle à Ox menée par B rencontre MA en un point I'. Démontrer que le lieu décrit par I' est une parabole ayant pour sommet le point M et pour axe une parallèle à Ox. *(G. L.)*

123. — On donne trois circonférences C, C', C'', passant par le même point O; on propose de mener par O une trans-

versale qui rencontre les circonférences proposées aux points A, A′, A″, et de telle façon que le rapport $\frac{AA'}{AA''}$ soit égal au rapport de deux lignes données p et q.

(Exam. oraux, Polyt. 1883.)

124. — On donne deux circonférences C et C′, tangentes au point A; soit D la tangente commune en ce point A; soient D′ et D″ les tangentes parallèles à D. Prenons sur D un point mobile M, et menons par M des tangentes à C et C′; ces droites rencontrent D′ en P, et D″ en Q. Les droites qui joignent les points P et Q aux centres respectifs des circonférences C et C′ se coupent en un point I. Démontrer que le lieu de ce point est une droite. *(G. L.)*

125. — On donne une circonférence C, et un point A, extérieur à cette circonférence. De ce point on mène une corde AMN, qui coupe la circonférence aux points M et N, et l'on projette ces points en P et Q sur le diamètre CA. Déterminer l'angle MAC de façon que le trapèze MNQP soit maximum et construire géométriquement cet angle.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 23976-3.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS